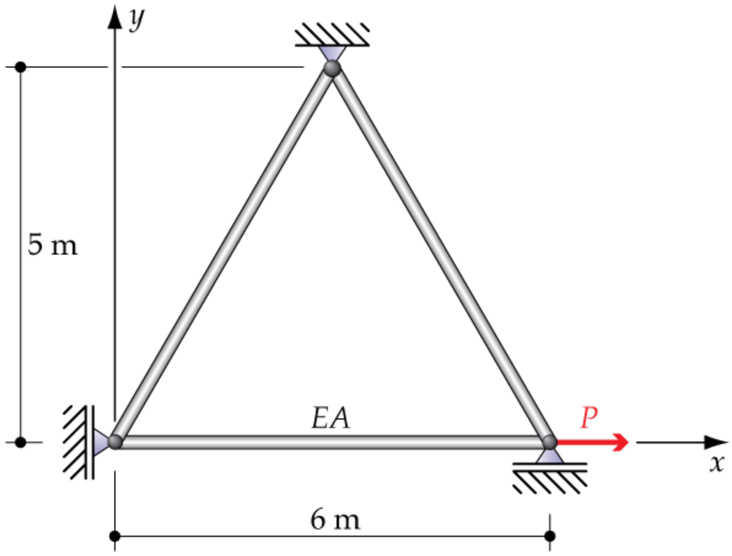
Podstawy mechaniki komputerowej
Rozwiązanie problemu kratownicy metodą MES

Ustawienie sposobu numerowania elementów macierzy $\quad ORIGIN \equiv 1$

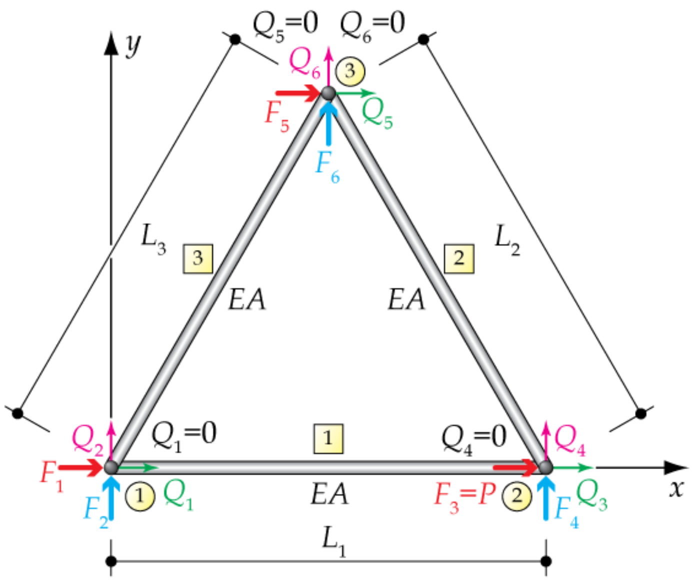
Problem brzegowy z warunkami brzegowymi



Dane materiałowe i obciążenie

$EA := 10 \cdot 10^6 \qquad P := 15 \cdot 10^3$

Dyskretyzacja kratownicy



Definicja macierzy sztywności i macierzy transformacji

$$ke(EA, L) := \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad T(s, c) := \begin{pmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{pmatrix}$$

Liczba węzłów, liczba węzłów elementu, liczba stopni swobody w węźle elementu

$$l_n := 3 \qquad l_w := 2 \qquad l_q := 2$$

Współrzędne węzłów elementów

$$X_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad X_2 := \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad X_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$Y_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Y_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad Y_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Obliczenie rzutów długości elementów na kierunki x i y układu globalnego

$$Lx_1 := X_{1_2} - X_{1_1} \qquad Lx_1 = 6$$

$$Ly_1 := Y_{1_2} - Y_{1_1} \qquad Ly_1 = 0$$

$$Lx_2 := X_{2_2} - X_{2_1} \qquad Lx_2 = -3$$

$$Ly_2 := Y_{2_2} - Y_{2_1} \qquad Ly_2 = 5$$

$$Lx_3 := X_{3_2} - X_{3_1} \qquad Lx_3 = 3$$

$$Ly_3 := Y_{3_2} - Y_{3_1} \qquad Ly_3 = 5$$

Obliczenie długości elementów

$$L_1 := \sqrt{Lx_1^{\,2} + Ly_1^{\,2}} \qquad L_1 = 6$$

$$L_2 := \sqrt{Lx_2^{\,2} + Ly_2^{\,2}} \qquad L_2 = 5.831$$

$$L_3 := \sqrt{Lx_3^{\,2} + Ly_3^{\,2}} \qquad L_3 = 5.831$$

Obliczenie kosinusów kierunkowych

$$c_1 := \frac{Lx_1}{L_1} \qquad c_2 := \frac{Lx_2}{L_2} \qquad c_3 := \frac{Lx_3}{L_3}$$

$$s_1 := \frac{Ly_1}{L_1} \qquad s_2 := \frac{Ly_2}{L_2} \qquad s_3 := \frac{Ly_3}{L_3}$$

Budowa macierzy Boole'a

$i := 1 .. l_w \cdot l_q \qquad j := 1 .. l_n \cdot l_q$

$B1_{i,j} := 0 \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B2_{i,j} := 0 \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B3_{i,j} := 0 \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B1_{1,1} := 1 \qquad B1_{2,2} := 1$

$B1_{3,3} := 1 \qquad B1_{4,4} := 1 \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B2_{1,3} := 1 \qquad B2_{2,4} := 1$

$B2_{3,5} := 1 \qquad B2_{4,6} := 1 \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B3_{1,1} := 1 \qquad B3_{2,2} := 1$

$B3_{3,5} := 1 \qquad B3_{4,6} := 1 \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Obliczenie macierzy sztywności w układach lokalnych

$ke_1 := ke(EA, L_1) \qquad ke_1 = \begin{pmatrix} 1.667 \times 10^6 & 0 & -1.667 \times 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.667 \times 10^6 & 0 & 1.667 \times 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$ke_2 := ke(EA, L_2) \qquad ke_2 = \begin{pmatrix} 1.715 \times 10^6 & 0 & -1.715 \times 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.715 \times 10^6 & 0 & 1.715 \times 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$ke_3 := ke(EA, L_3) \qquad ke_3 = \begin{pmatrix} 1.715\times10^6 & 0 & -1.715\times10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.715\times10^6 & 0 & 1.715\times10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obliczenie macierzy transformacji i macierzy sztywności w układzie globalnym

$$T_1 := T(s_1, c_1) \qquad T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ke_1 := T_1^T \cdot ke_1 \cdot T_1 \qquad Ke_1 = \begin{pmatrix} 1.667\times10^6 & 0 & -1.667\times10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.667\times10^6 & 0 & 1.667\times10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_2 := T(s_2, c_2) \qquad T_2 = \begin{pmatrix} -0.514 & 0.857 & 0 & 0 \\ -0.857 & -0.514 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.514 & 0.857 \\ 0 & 0 & -0.857 & -0.514 \end{pmatrix}$$

$$Ke_2 := T_2^T \cdot ke_2 \cdot T_2 \qquad Ke_2 = \begin{pmatrix} 4.54\times10^5 & -7.566\times10^5 & -4.54\times10^5 & 7.566\times10^5 \\ -7.566\times10^5 & 1.261\times10^6 & 7.566\times10^5 & -1.261\times10^6 \\ -4.54\times10^5 & 7.566\times10^5 & 4.54\times10^5 & -7.566\times10^5 \\ 7.566\times10^5 & -1.261\times10^6 & -7.566\times10^5 & 1.261\times10^6 \end{pmatrix}$$

$$T_3 := T(s_3, c_3) \qquad T_3 = \begin{pmatrix} 0.514 & 0.857 & 0 & 0 \\ -0.857 & 0.514 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.514 & 0.857 \\ 0 & 0 & -0.857 & 0.514 \end{pmatrix}$$

$$Ke_3 := T_3^T \cdot ke_3 \cdot T_3 \qquad Ke_3 = \begin{pmatrix} 4.54\times10^5 & 7.566\times10^5 & -4.54\times10^5 & -7.566\times10^5 \\ 7.566\times10^5 & 1.261\times10^6 & -7.566\times10^5 & -1.261\times10^6 \\ -4.54\times10^5 & -7.566\times10^5 & 4.54\times10^5 & 7.566\times10^5 \\ -7.566\times10^5 & -1.261\times10^6 & 7.566\times10^5 & 1.261\times10^6 \end{pmatrix}$$

Agregacja macierzy sztywności

$$K := B_1^T \cdot Ke_1 \cdot B_1 + B_2^T \cdot Ke_2 \cdot B_2 + B_3^T \cdot Ke_3 \cdot B_3$$

$$K = \begin{pmatrix} 2.121\times10^{6} & 7.566\times10^{5} & -1.667\times10^{6} & 0 & -4.54\times10^{5} & -7.566\times10^{5} \\ 7.566\times10^{5} & 1.261\times10^{6} & 0 & 0 & -7.566\times10^{5} & -1.261\times10^{6} \\ -1.667\times10^{6} & 0 & 2.121\times10^{6} & -7.566\times10^{5} & -4.54\times10^{5} & 7.566\times10^{5} \\ 0 & 0 & -7.566\times10^{5} & 1.261\times10^{6} & 7.566\times10^{5} & -1.261\times10^{6} \\ -4.54\times10^{5} & -7.566\times10^{5} & -4.54\times10^{5} & 7.566\times10^{5} & 9.079\times10^{5} & 0 \\ -7.566\times10^{5} & -1.261\times10^{6} & 7.566\times10^{5} & -1.261\times10^{6} & 0 & 2.522\times10^{6} \end{pmatrix}$$

Budowa wektora sił węzłowych

$F_j := 0$ $\quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$F_3 := P$ $\quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.5\times10^{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Uwzględnienie warunków brzegowych

$K_{wb} := K$ $\quad F_{wb} := F$

Na stopniu swobody o numerze 1

$K_{wb_{1,j}} := 0$ $\quad K_{wb_{j,1}} := 0$ $\quad K_{wb_{1,1}} := 1$

$F_{wb_1} := 0$

Na stopniu swobody o numerze 4

$K_{wb_{4,j}} := 0$ $\quad K_{wb_{j,4}} := 0$ $\quad K_{wb_{4,4}} := 1$

$F_{wb_4} := 0$

Na stopniu swobody o numerze 5

$K_{wb_{5,j}} := 0$ $\quad K_{wb_{j,5}} := 0$ $\quad K_{wb_{5,5}} := 1$

$F_{wb_5} := 0$

Na stopniu swobody o numerze 6

$K_{wb_{6,j}} := 0$ $K_{wb_{j,6}} := 0$ $K_{wb_{6,6}} := 1$

$F_{wb_6} := 0$

$$K_{wb} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.261\times10^{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.121\times10^{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_{wb} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.5\times10^{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie układu równań, obliczenie reakcji

$Q := K_{wb}^{-1}\cdot F_{wb}$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7.073\times10^{-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$R := K\cdot Q$

$$R = \begin{pmatrix} -1.179\times10^{4} \\ 0 \\ 1.5\times10^{4} \\ -5.352\times10^{3} \\ -3.211\times10^{3} \\ 5.352\times10^{3} \end{pmatrix}$$

Obliczenie wektorów przemieszczeń dla elementów w układzie globalnym

$Q_1 := B_1\cdot Q$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7.073\times10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_2 := B_2 \cdot Q \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 7.073 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_3 := B_3 \cdot Q \qquad Q_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obliczenie wektorów przemieszczeń dla elementów w układach lokalnych

$$q_1 := T_1 \cdot Q_1 \qquad q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7.073 \times 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_2 := T_2 \cdot Q_2 \qquad q_2 = \begin{pmatrix} -3.639 \times 10^{-3} \\ -6.065 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_3 := T_3 \cdot Q_3 \qquad q_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obliczenie wektorów sił węzłowych w elementach w układach lokalnych

$$f_1 := ke_1 \cdot q_1 \qquad f_1 = \begin{pmatrix} -1.179 \times 10^{4} \\ 0 \\ 1.179 \times 10^{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_2 := ke_2 \cdot q_2 \qquad f_2 = \begin{pmatrix} -6.241 \times 10^{3} \\ 0 \\ 6.241 \times 10^{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_3 := ke_3 \cdot q_3 \qquad f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$