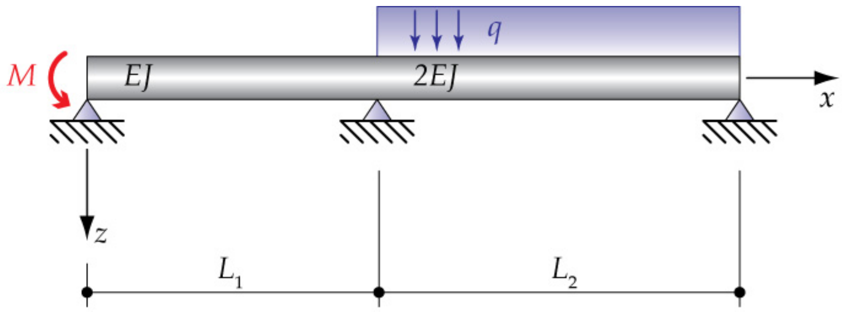
**Podstawy mechaniki komputerowej**
Rozwiązanie problemu belki zginanej metodą MES

Ustawienie sposobu numerowania elementów macierzy $\quad ORIGIN \equiv 1$

## Belka zginana

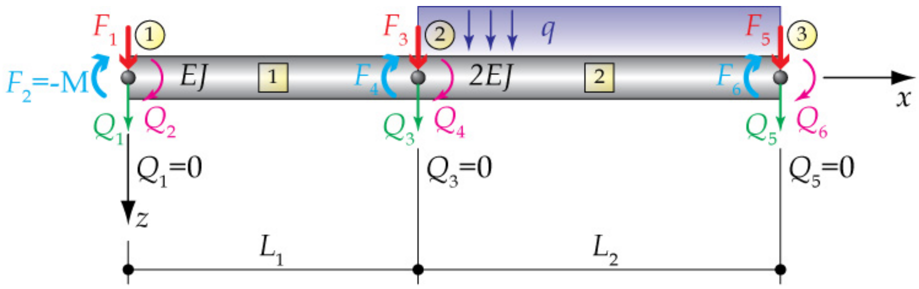



## Dane geometryczne, materiałowe i obciążenie

$L_1 := 6 \quad L_2 := 8 \quad EJ := 100$

$q := 10 \quad M := 20$

## Dyskretyzacja belki




## Definicja macierzy sztywności i wektora równowazników węzłowych obciążenia

$$Ke(EJ,L) := \begin{pmatrix} \frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} & \frac{-12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} \\ \frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} & \frac{-6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} \\ \frac{-12EJ}{L^3} & \frac{-6EJ}{L^2} & \frac{12EJ}{L^3} & \frac{-6EJ}{L^2} \\ \frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} & \frac{-6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} \end{pmatrix} \qquad Pe(q,L) := \begin{pmatrix} \frac{q \cdot L}{2} \\ \frac{q \cdot L^2}{12} \\ \frac{q \cdot L}{2} \\ \frac{-q \cdot L^2}{12} \end{pmatrix}$$

## Liczba węzłów, liczba węzłów elementu, liczba stopni swobody w węźle elementu

$l_n := 3 \quad l_w := 2 \quad l_q := 2$

## Budowa macierzy Boole'a

$i := 1 .. l_w \cdot l_q \qquad j := 1 .. l_n \cdot l_q$

$B1_{i,j} := 0 \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B2_{i,j} := 0 \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B1_{1,1} := 1 \qquad B1_{2,2} := 1$

$B1_{3,3} := 1 \qquad B1_{4,4} := 1 \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B2_{1,3} := 1 \qquad B2_{2,4} := 1$

$B2_{3,5} := 1 \qquad B2_{4,6} := 1 \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

## Obliczenie macierzy sztywności

$Ke_1 := Ke(EJ, L_1) \qquad Ke_1 = \begin{pmatrix} 5.556 & 16.667 & -5.556 & 16.667 \\ 16.667 & 66.667 & -16.667 & 33.333 \\ -5.556 & -16.667 & 5.556 & -16.667 \\ 16.667 & 33.333 & -16.667 & 66.667 \end{pmatrix}$

$Ke_2 := Ke(2EJ, L_2) \qquad Ke_2 = \begin{pmatrix} 4.688 & 18.75 & -4.688 & 18.75 \\ 18.75 & 100 & -18.75 & 50 \\ -4.688 & -18.75 & 4.688 & -18.75 \\ 18.75 & 50 & -18.75 & 100 \end{pmatrix}$

## Obliczenie równoważników węzłowych obciążenia

$Pe_1 := Pe(0, L_1) \qquad Pe_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$Pe_2 := Pe(q, L_2) \qquad Pe_2 = \begin{pmatrix} 40 \\ 53.333 \\ 40 \\ -53.333 \end{pmatrix}$

## Agregacja macierzy sztywności

$$K := B_1^T \cdot Ke_1 \cdot B_1 + B_2^T \cdot Ke_2 \cdot B_2$$

$$K = \begin{pmatrix} 5.556 & 16.667 & -5.556 & 16.667 & 0 & 0 \\ 16.667 & 66.667 & -16.667 & 33.333 & 0 & 0 \\ -5.556 & -16.667 & 10.243 & 2.083 & -4.688 & 18.75 \\ 16.667 & 33.333 & 2.083 & 166.667 & -18.75 & 50 \\ 0 & 0 & -4.688 & -18.75 & 4.688 & -18.75 \\ 0 & 0 & 18.75 & 50 & -18.75 & 100 \end{pmatrix}$$

## Agregacja równoważników węzłowych obciążenia

$$P := B_1^T \cdot Pe_1 + B_2^T \cdot Pe_2$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 40 \\ 53.333 \\ 40 \\ -53.333 \end{pmatrix}$$

## Budowa wektora sił węzłowych

$$F_j := 0 \qquad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 := -M \qquad F = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Uwzględnienie warunków brzegowych

$$K_{wb} := K \qquad F_{wb} := F \qquad P_{wb} := P$$

Na stopniu swobody o numerze 1

$$K_{wb_{1,j}} := 0 \qquad K_{wb_{j,1}} := 0 \qquad K_{wb_{1,1}} := 1$$

$$F_{wb_1} := 0 \qquad P_{wb_1} := 0$$

Na stopniu swobody o numerze 3

$$K_{wb_{3,j}} := 0 \qquad K_{wb_{j,3}} := 0 \qquad K_{wb_{3,3}} := 1$$

$$F_{wb_3} := 0 \qquad P_{wb_3} := 0$$

Na stopniu swobody o numerze 5

$K_{wb_{5,j}} := 0 \qquad K_{wb_{j,5}} := 0 \qquad K_{wb_{5,5}} := 1$

$F_{wb_5} := 0 \qquad P_{wb_5} := 0$

$$K_{wb} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 66.667 & 0 & 33.333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 33.333 & 0 & 166.667 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

$$F_{wb} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P_{wb} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 53.333 \\ 0 \\ -53.333 \end{pmatrix}$$

## Rozwiązanie układu równań, obliczenie reakcji

$$Q := K_{wb}^{-1} \cdot (P_{wb} + F_{wb}) \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.66 \\ 0 \\ 0.72 \\ 0 \\ -0.893 \end{pmatrix}$$

$$R := K \cdot Q - P \qquad R = \begin{pmatrix} 1 \\ -20 \\ -44.25 \\ -7.105 \times 10^{-15} \\ -36.75 \\ 1.421 \times 10^{-14} \end{pmatrix}$$

## Obliczenie wektorów przemieszczeń dla elementów

$$Q_1 := B_1 \cdot Q \qquad Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.66 \\ 0 \\ 0.72 \end{pmatrix}$$

$$Q_2 := B_2 \cdot Q \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.72 \\ 0 \\ -0.893 \end{pmatrix}$$

## Definicja wektora funkcji kształtu

$$N_1(x,L) := 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \qquad N_2(x,L) := x\cdot\left[1 - 2\left(\frac{x}{L}\right) + \left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

$$N_3(x,L) := 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \qquad N_4(x,L) := x\cdot\left[-\frac{x}{L} + \left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

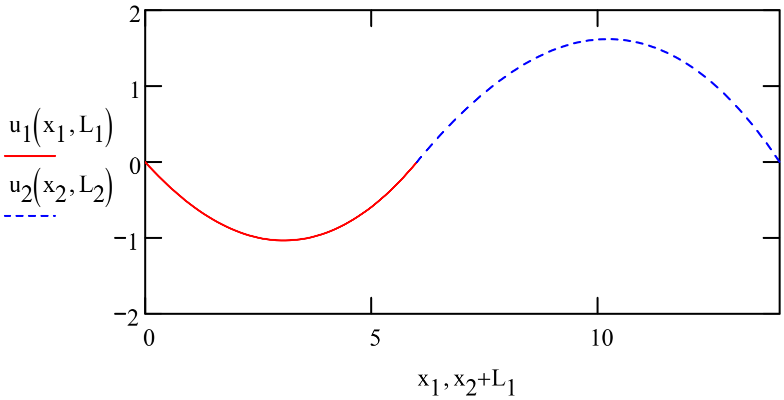
$$N(x,L) := \begin{pmatrix} N_1(x,L) & N_2(x,L) & N_3(x,L) & N_4(x,L) \end{pmatrix}$$

## Obliczenie funkcji przemieszczeń w elementach

$$u_1(x,L) := N(x,L)\cdot Q_1 \qquad u_2(x,L) := N(x,L)\,Q_2$$

## Wykres przemieszczenia

$$x_1 := 0, 0 + 0.1 .. L_1 \qquad x_2 := 0, 0 + 0.1 .. L_2$$




## Obliczenie wektorów sił węzłowych w elementach

$$F_1 := Ke_1\cdot Q_1 - Pe_1 \qquad F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -20 \\ -1 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$$F_2 := Ke_2\cdot Q_2 - Pe_2 \qquad F_2 = \begin{pmatrix} -43.25 \\ -26 \\ -36.75 \\ 1.421 \times 10^{-14} \end{pmatrix}$$