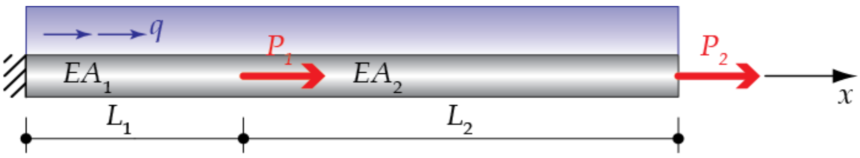
Elementy projektowania inżynierskiego
Rozwiązanie problemu pręta rozciąganego metodą MES

Ustawienie sposobu numerowania elementów macierzy $\quad ORIGIN \equiv 1$

Pręt rozciągany



Dane geometryczne, materiałowe i obciążenie

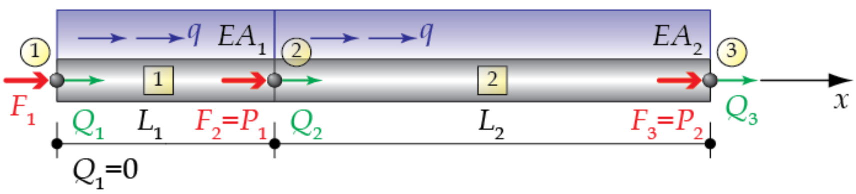
$L_1 := 0.4 \qquad A_1 := 0.5\cdot 10^{-3}$

$L_2 := 0.8 \qquad A_2 := 0.4\cdot 10^{-3}$

$q := 10\cdot 10^{3} \qquad P_1 := 40\cdot 10^{3} \qquad P_2 := 5\cdot 10^{3}$

$E := 200\cdot 10^{9}$

Dyskretyzacja pręta



Definicja macierzy sztywności i wektora równowazników węzłowych obciążenia

$$Ke(EA, L) := \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & \frac{-EA}{L} \\ \frac{-EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{pmatrix} \qquad Pe(q, L) := \begin{pmatrix} \frac{q\cdot L}{2} \\ \frac{q\cdot L}{2} \end{pmatrix}$$

Liczba węzłów, liczba węzłów elementu, liczba stopni swobody w węźle elementu

$l_n := 3 \qquad l_w := 2 \qquad l_q := 1$

Budowa macierzy Boole'a

$i := 1 .. l_w\cdot l_q \qquad j := 1 .. l_n\cdot l_q$

$$B1_{i,j} := 0 \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B2_{i,j} := 0 \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B_{1_{1,1}} := 1$ $B_{1_{2,2}} := 1$ $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$B_{2_{1,2}} := 1$ $B_{2_{2,3}} := 1$ $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Obliczenie macierzy sztywności

$Ke_1 := Ke(E \cdot A_1, L_1)$ $Ke_1 = \begin{pmatrix} 2.5 \times 10^8 & -2.5 \times 10^8 \\ -2.5 \times 10^8 & 2.5 \times 10^8 \end{pmatrix}$

$Ke_2 := Ke(E \cdot A_2, L_2)$ $Ke_2 = \begin{pmatrix} 1 \times 10^8 & -1 \times 10^8 \\ -1 \times 10^8 & 1 \times 10^8 \end{pmatrix}$

Obliczenie równoważników węzłowych obciążenia

$Pe_1 := Pe(q, L_1)$ $Pe_1 = \begin{pmatrix} 2 \times 10^3 \\ 2 \times 10^3 \end{pmatrix}$

$Pe_2 := Pe(q, L_2)$ $Pe_2 = \begin{pmatrix} 4 \times 10^3 \\ 4 \times 10^3 \end{pmatrix}$

Agregacja macierzy sztywności

$K := B_1^T \cdot Ke_1 \cdot B_1 + B_2^T \cdot Ke_2 \cdot B_2$ $K = \begin{pmatrix} 2.5 \times 10^8 & -2.5 \times 10^8 & 0 \\ -2.5 \times 10^8 & 3.5 \times 10^8 & -1 \times 10^8 \\ 0 & -1 \times 10^8 & 1 \times 10^8 \end{pmatrix}$

Agregacja równoważników węzłowych obciążenia

$P := B_1^T \cdot Pe_1 + B_2^T \cdot Pe_2$ $P = \begin{pmatrix} 2 \times 10^3 \\ 6 \times 10^3 \\ 4 \times 10^3 \end{pmatrix}$

Budowa wektora sił węzłowych

$F_j := 0$ $F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$F_2 := P_1$ $F_3 := P_2$ $F = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \times 10^4 \\ 5 \times 10^3 \end{pmatrix}$

Uwzględnienie warunków brzegowych

$K_{wb} := K$ $F_{wb} := F$ $P_{wb} := P$

Na stopniu swobody o numerze 1

$K_{wb_{1,j}} := 0$ $K_{wb_{j,1}} := 0$ $K_{wb_{1,1}} := 1$

$F_{wb_1} := 0$ $P_{wb_1} := 0$

$$K_{wb} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3.5\times10^{8} & -1\times10^{8} \\ 0 & -1\times10^{8} & 1\times10^{8} \end{pmatrix}$$

$$F_{wb} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4\times10^{4} \\ 5\times10^{3} \end{pmatrix} \qquad P_{wb} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6\times10^{3} \\ 4\times10^{3} \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie układu równań, obliczenie reakcji

$$Q := K_{wb}^{-1}\cdot\left(P_{wb} + F_{wb}\right) \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.2\times10^{-4} \\ 3.1\times10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$R := K\cdot Q - P \qquad R = \begin{pmatrix} -57\times10^{3} \\ 40\times10^{3} \\ 5\times10^{3} \end{pmatrix}$$

Obliczenie wektorów przemieszczeń dla elementów

$$Q_1 := B_1\cdot Q \qquad Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.2\times10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$Q_2 := B_2\cdot Q \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 2.2\times10^{-4} \\ 3.1\times10^{-4} \end{pmatrix}$$

Definicja wektora funkcji kształtu

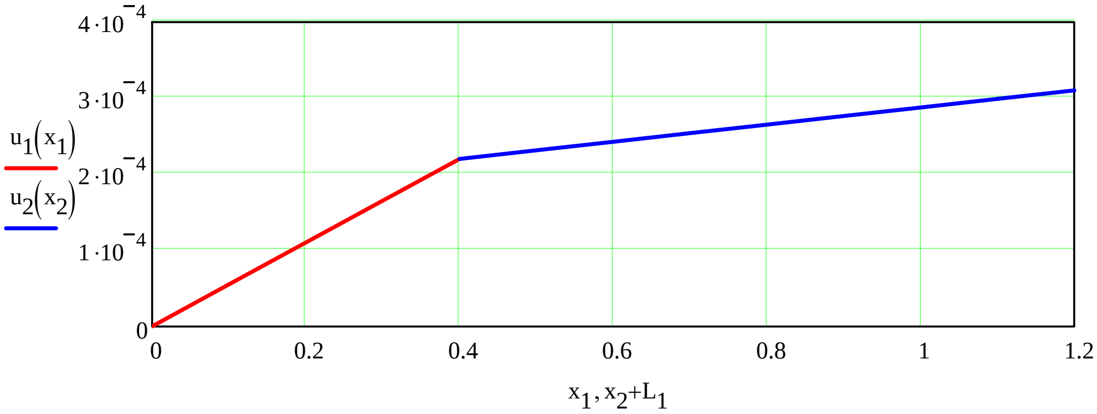
$$N_1(x,L) := 1 - \frac{x}{L} \qquad N_2(x,L) := \frac{x}{L} \qquad N(x,L) := \begin{pmatrix} N_1(x,L) & N_2(x,L) \end{pmatrix}$$

Obliczenie funkcji przemieszczeń w elementach

$$u_1(x) := N\left(x,L_1\right)\cdot Q_1 \qquad u_2(x) := N\left(x,L_2\right) Q_2$$

Wykres przemieszczenia

$x_1 := 0, 0+0.1 .. L_1$ $\qquad$ $x_2 := 0, 0+0.1 .. L_2$



Obliczenie wektorów sił węzłowych w elementach

$F_1 := Ke_1 \cdot Q_1 - Pe_1$ $\qquad$ $F_1 = \begin{pmatrix} -57 \times 10^3 \\ 53 \times 10^3 \end{pmatrix}$

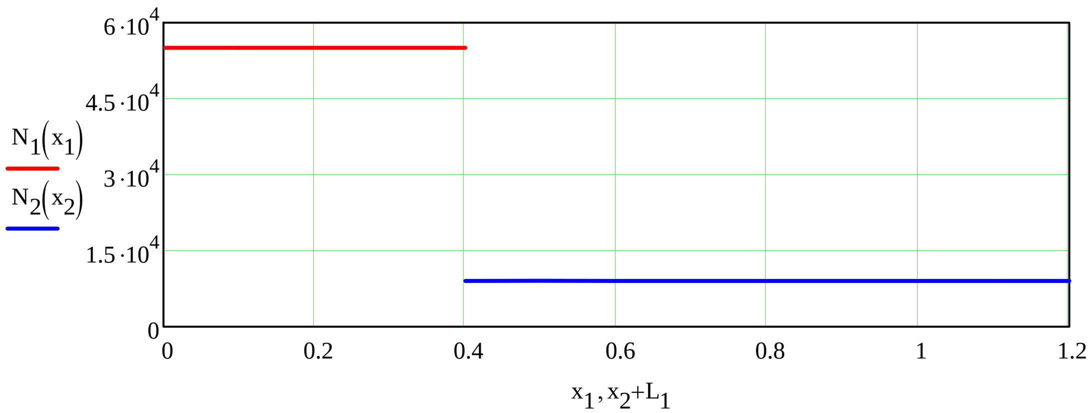
$F_2 := Ke_2 \cdot Q_2 - Pe_2$ $\qquad$ $F_2 = \begin{pmatrix} -13 \times 10^3 \\ 5 \times 10^3 \end{pmatrix}$

Obliczenie siły normalnej

$N_1(x) := E \cdot A_1 \cdot \left(\frac{d}{dx} u_1(x)\right)$ $\qquad$ $N_2(x) := E \cdot A_2 \cdot \left(\frac{d}{dx} u_2(x)\right)$

$N_1(0) = 55 \times 10^3$ $\qquad$ $N_2(0) = 9 \times 10^3$

$N_1(L_1) = 55 \times 10^3$ $\qquad$ $N_2(L_2) = 9 \times 10^3$



Porównaj wartości sił przekrojowych w węzłach elementów, obliczonych z wykorzystaniem:

- równań równowagi elementów,
- zróżniczkowanych funkcji kształtu.

Jak można poprawić wynikii?

Obliczenie naprężeń normalnych

$\sigma_1(x) := \dfrac{N_1(x)}{A_1}$ $\sigma_2(x) := \dfrac{N_2(x)}{A_2}$

$\sigma_1(0) = 110 \times 10^6$ $\sigma_2(0) = 22.5 \times 10^6$

$\sigma_1(L_1) = 110 \times 10^6$ $\sigma_2(L_2) = 22.5 \times 10^6$