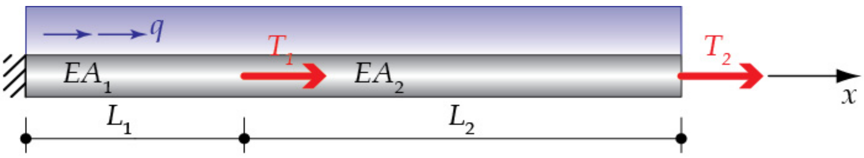
Elementy projektowania inzynierskiego
Rozwiazanie problemu preta rozciaganego metoda MES

Ustawienie sposobu numerowania elementów macierzy $\quad ORIGIN \equiv 1$

Pręt rozciągany



Dane geometryczne, materiałowe i obciążenie

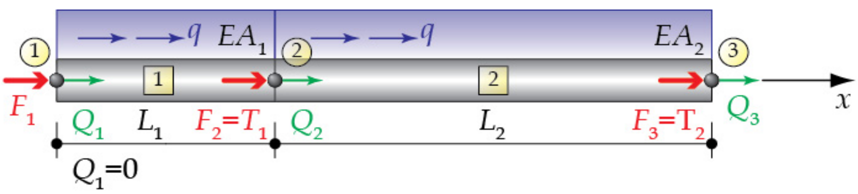
$L1 := 0.4 \qquad A1 := 0.5 \cdot 10^{-3}$

$L2 := 0.8 \qquad A2 := 0.4 \cdot 10^{-3}$

$q := 10 \cdot 10^{3} \qquad T1 := 40 \cdot 10^{3} \qquad T2 := 5 \cdot 10^{3}$

$E := 200 \cdot 10^{9}$

Dyskretyzacja pręta



Definicja macierzy sztywności i wektora równowazników węzłowych obciążenia

$$Ke(EA, L) := \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & \frac{-EA}{L} \\ \frac{-EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{pmatrix} \qquad Pe(q, L) := \begin{pmatrix} \frac{q \cdot L}{2} \\ \frac{q \cdot L}{2} \end{pmatrix}$$

Liczba węzłów, liczba węzłów elementu, liczba stopni swobody w węźle elementu

$ln := 3 \qquad lw := 2 \qquad lq := 1$

Budowa macierzy Boole'a

$i := 1 .. lw \cdot lq \qquad j := 1 .. ln \cdot lq$

$B1_{i,j} := 0 \qquad B1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B2_{i,j} := 0 \qquad B2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B1_{1,1} := 1$ $B1_{2,2} := 1$ $B1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$B2_{1,2} := 1$ $B2_{2,3} := 1$ $B2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Obliczenie macierzy sztywności

$K1 := Ke(E \cdot A1, L1)$ $K1 = \begin{pmatrix} 2.5 \times 10^{8} & -2.5 \times 10^{8} \\ -2.5 \times 10^{8} & 2.5 \times 10^{8} \end{pmatrix}$

$K2 := Ke(E \cdot A2, L2)$ $K2 = \begin{pmatrix} 1 \times 10^{8} & -1 \times 10^{8} \\ -1 \times 10^{8} & 1 \times 10^{8} \end{pmatrix}$

Obliczenie równoważników węzłowych obciążenia

$P1 := Pe(q, L1)$ $P1 = \begin{pmatrix} 2 \times 10^{3} \\ 2 \times 10^{3} \end{pmatrix}$

$P2 := Pe(q, L2)$ $P2 = \begin{pmatrix} 4 \times 10^{3} \\ 4 \times 10^{3} \end{pmatrix}$

Agregacja macierzy sztywności

$K := B1^{T} \cdot K1 \cdot B1 + B2^{T} \cdot K2 \cdot B2$ $K = \begin{pmatrix} 2.5 \times 10^{8} & -2.5 \times 10^{8} & 0 \\ -2.5 \times 10^{8} & 3.5 \times 10^{8} & -1 \times 10^{8} \\ 0 & -1 \times 10^{8} & 1 \times 10^{8} \end{pmatrix}$

Agregacja równoważników węzłowych obciążenia

$P := B1^{T} \cdot P1 + B2^{T} \cdot P2$ $P = \begin{pmatrix} 2 \times 10^{3} \\ 6 \times 10^{3} \\ 4 \times 10^{3} \end{pmatrix}$

Budowa wektora sił węzłowych

$F_{j} := 0$ $F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$F_{2} := T1$ $F_{3} := T2$ $F = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \times 10^{4} \\ 5 \times 10^{3} \end{pmatrix}$

Uwzględnienie warunków brzegowych

$Kw := K$ $Fw := F$ $Pw := P$

Na stopniu swobody o numerze 1

$Kw_{1,j} := 0$ $Kw_{j,1} := 0$ $Kw_{1,1} := 1$

$Fw_1 := 0$ $Pw_1 := 0$

$$Kw = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3.5 \times 10^{8} & -1 \times 10^{8} \\ 0 & -1 \times 10^{8} & 1 \times 10^{8} \end{pmatrix}$$

$$Fw = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \times 10^{4} \\ 5 \times 10^{3} \end{pmatrix} \qquad Pw = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \times 10^{3} \\ 4 \times 10^{3} \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie układu równań, obliczenie reakcji

$$Q := Kw^{-1} \cdot (Pw + Fw) \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.2 \times 10^{-4} \\ 3.1 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$R := K \cdot Q - P \qquad R = \begin{pmatrix} -57 \times 10^{3} \\ 40 \times 10^{3} \\ 5 \times 10^{3} \end{pmatrix}$$

Obliczenie wektorów przemieszczeń dla elementów

$$Q1 := B1 \cdot Q \qquad Q1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.2 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$Q2 := B2 \cdot Q \qquad Q2 = \begin{pmatrix} 2.2 \times 10^{-4} \\ 3.1 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Definicja wektora funkcji kształtu

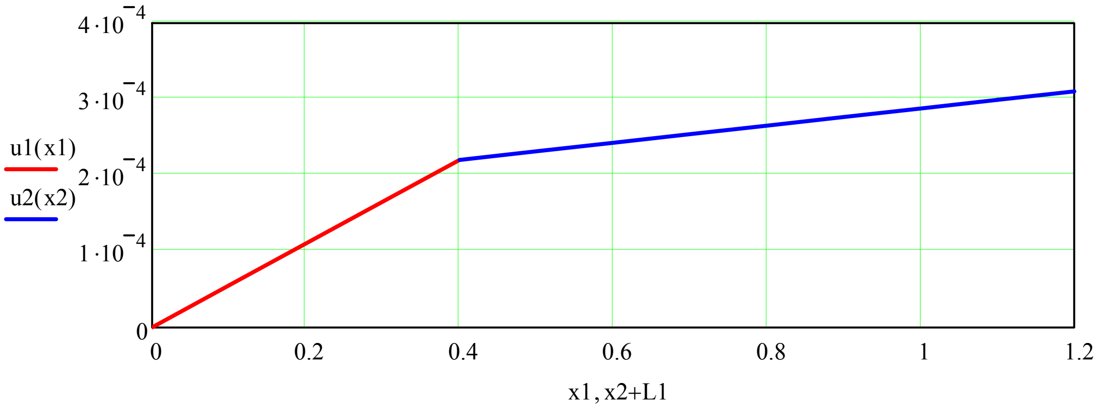
$$N1(x,L) := 1 - \frac{x}{L} \qquad N2(x,L) := \frac{x}{L} \qquad N(x,L) := \begin{pmatrix} N1(x,L) & N2(x,L) \end{pmatrix}$$

Obliczenie funkcji przemieszczeń w elementach

$$u1(x) := N(x,L1) \cdot Q1 \qquad u2(x) := N(x,L2)\,Q2$$

Wykres przemieszczenia

$x1 := 0, 0 + 0.1 .. L1$ $x2 := 0, 0 + 0.1 .. L2$



Obliczenie wektorów sił węzłowych w elementach

$F1 := K1 \cdot Q1 - P1$ $F1 = \begin{pmatrix} -57 \times 10^3 \\ 53 \times 10^3 \end{pmatrix}$

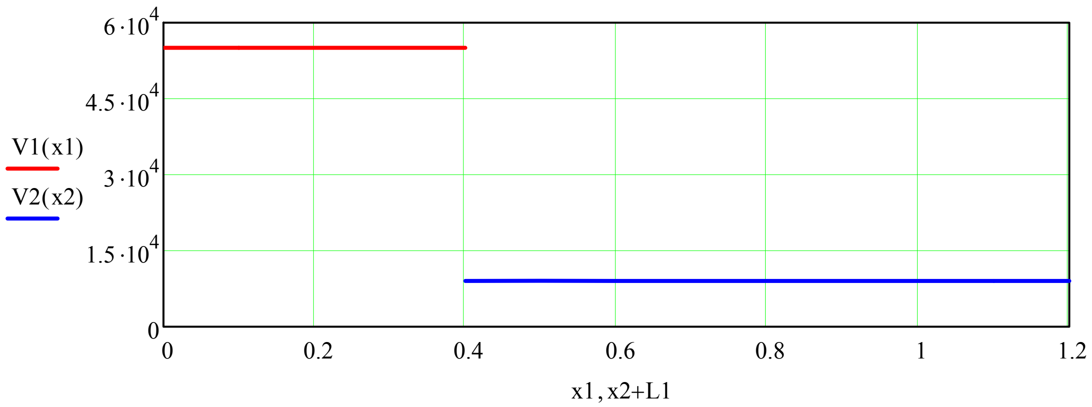
$F2 := K2 \cdot Q2 - P2$ $F2 = \begin{pmatrix} -13 \times 10^3 \\ 5 \times 10^3 \end{pmatrix}$

Obliczenie siły normalnej

$V1(x) := E \cdot A1 \cdot \left(\frac{d}{dx} u1(x)\right)$ $V2(x) := E \cdot A2 \cdot \left(\frac{d}{dx} u2(x)\right)$

$V1(0) = 55 \times 10^3$ $V2(0) = 9 \times 10^3$

$V1(L1) = 55 \times 10^3$ $V2(L2) = 9 \times 10^3$



Porównaj wartosci sil przekrojowych w wezlach elementów, obliczonych z wykorzystaniem:

- równan równowagi elementów,
- zrózniczkowanych funkcji ksztaltu.

Jak mozna poprawic wynikii?

Obliczenie naprężeń normalnych

$$\sigma1(x) := \frac{V1(x)}{A1}$$

$$\sigma2(x) := \frac{V2(x)}{A2}$$

$$\sigma1(0) = 110 \times 10^{6}$$

$$\sigma2(0) = 22.5 \times 10^{6}$$

$$\sigma1(L1) = 110 \times 10^{6}$$

$$\sigma2(L2) = 22.5 \times 10^{6}$$