

# Elementy projektowania inżynierskiego

## Przypomnienie systemu Mathcad

### Definicja zmiennych skalarnych

$$a := 2$$

$$b := -3$$

$$h_3 := \frac{1}{2}$$

$$a : 2$$

$$h . 3 : 1 / 2$$

[S] - SPACE

[T] - TAB

<C> - CTRL

<S> - SHIFT

### Wyświetlenie wartości zmiennych

$$a = 2$$

$$b = -3$$

$$h_3 = 0.5$$

$$a =$$

$$h . 3 =$$

### Przykładowe wyrażenia (obliczenia numeryczne i symboliczne)

$$\frac{a \cdot b^2 + 35 \cdot \frac{\ln(h_3)}{2}}{10 \cdot e \cdot (\sqrt{e} - 3 \cdot h_3)} = 1.452$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \rightarrow \frac{13}{12}$$

$$1 / 2 [S] + 1 / 3 [S] + 1 / 4 [S]$$

### Badanie przebiegu zmienności funkcji jednej zmiennej

Definicja funkcji

$$a := 1$$

$$b := -5$$

$$c := 6$$

$$f(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Sprawdzenie funkcji (obliczenia symboliczne)

$$f(x) \rightarrow x^2 - 5 \cdot x + 6$$

$$f ( x ) = <C>>$$

Obliczenie wartości funkcji (obliczenia numeryczne)

$$f(1) = 2$$

$$f ( 1 ) =$$

Obliczenie pochodnej funkcji

$$f_p(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

$$f . p ( x ) : <S>/$$

Wyświetlenie pochodnej funkcji

$$f_p(x) \rightarrow 2 \cdot x - 5$$

$$f . p ( x ) <C>>$$

Obliczenie wartości pochodnej

$$f_p(1) = -3$$

$$x : 1, 1.5 ; 4$$

Definicja zmiennej zakresowej

$$x := 1, 1.5..4$$

Obliczenie zbioru wartości funkcji i jej pochodnej

$$f(x) =$$

2
0.75
0
-0.25
0
0.75
2

$$f_p(x) =$$

-3
-2
-1
2.377·10 <sup>-15</sup>
1
2
3

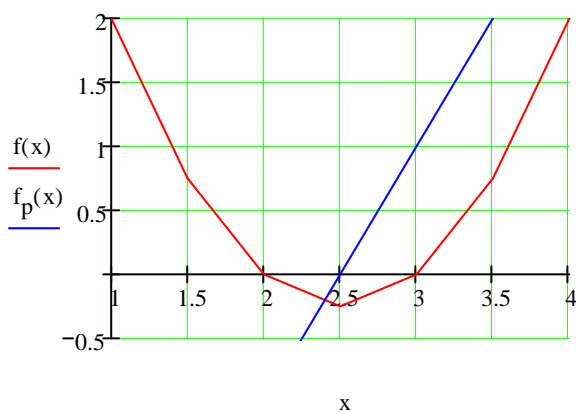
$$f(x) =$$

Wstawienie wykresu

<S>2

w polu opisu po lewej stronie

$$f(x), f_p(x)$$



Obliczenie wyznacznika dwumianu kwadratowego

$$\Delta := b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$\Delta = 1$$

$$D <C>G : b^2 [S] - 4 * a * c$$

$$D <C>G =$$

Obliczenie miejsc zerowych

$$x_1 := \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

$$x_1 = 2$$

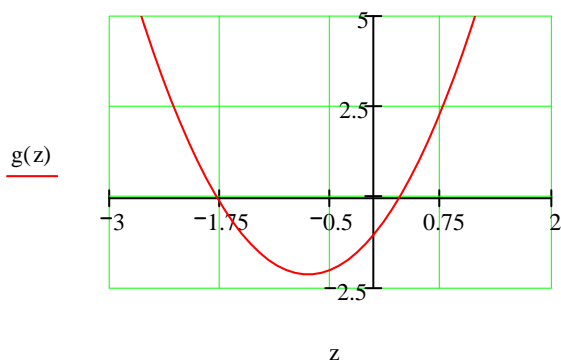
$$x_2 := \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

$$x_2 = 3$$

## Miejsca zerowe funkcji (obliczenia numeryczne)

$$g(z) := 2 \cdot z^2 + 3 \cdot z - 1$$

$$z := -3, -2.9 .. 2$$



$$z := -2$$

$$z_1 := \text{root}(g(z), z) \quad z_1 = -1.781$$

$$z := 0$$

$$z_2 := \text{root}(g(z), z) \quad z_2 = 0.281$$

## Pole powierzchni pod wykresem funkcji (całka)

$$p := \int_1^2 f(x) dx \quad p = 0.833$$

$$p : \langle S \rangle f(x) [T] x [T] 1 [T] 2 =$$

## Interpolacja Lagrange'a

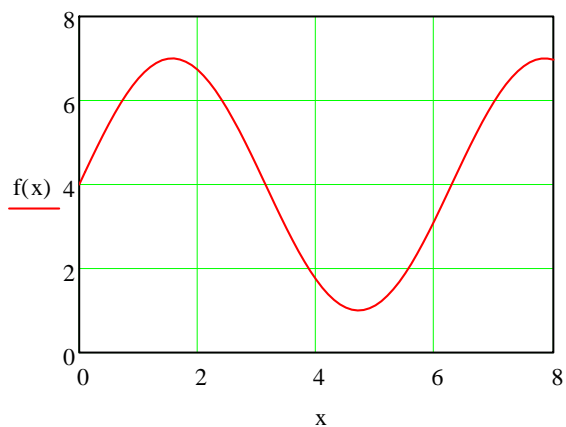
Definicja funkcji interpolowanej

$$f(x) := 3 \sin(x) + 4$$

Definicja zmiennej zakresowej

$$x := 0, 0.1 .. 8$$

Wykres funkcji



## Definicja węzłów interpolacji

$$x_0 := 0 \quad x_1 := 1 \quad x_2 := 2$$

## Obliczenie wartości funkcji interpolowanej w węzłach

$$f_0 := f(x_0) \quad f_1 := f(x_1) \quad f_2 := f(x_2)$$

$$f_0 = 4 \quad f_1 = 6.524 \quad f_2 = 6.728$$

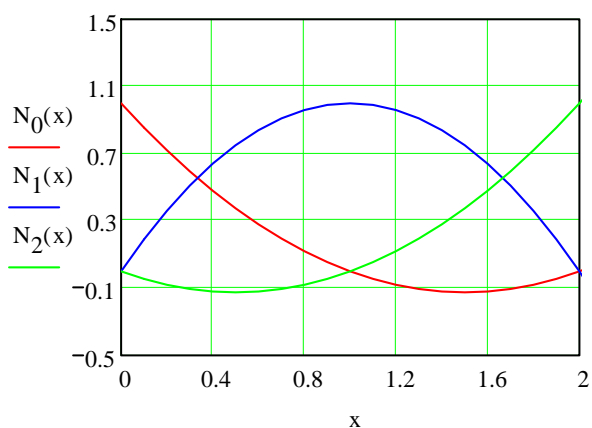
## Definicja wielomianów bazowych

$$N_0(x) := \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$N_1(x) := \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$N_2(x) := \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

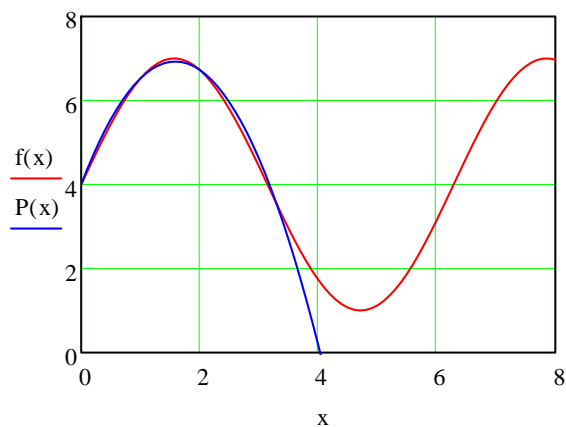
## Wykresy wielomianów bazowych



## Definicja wielomianu interpolacyjnego

$$P(x) := N_0(x) \cdot f_0 + N_1(x) \cdot f_1 + N_2(x) \cdot f_2$$

## Wykresy funkcji i wielomianu interpolacyjnego



**Aproksymacja (macierzowo)**

Ustalenie sposobu numerowania elementów macierzy

$$\text{ORIGIN} := 1$$

Liczba punktów

$$n := 7 \quad i := 1..n$$

Stożek wielomianu aproksymującego

$$m := 3 \quad j := 1..m$$

Dane wejściowe (dyskretne wartości argumentu i funkcji)

$$X_i := \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline 6 \\ \hline 7 \\ \hline 8 \\ \hline \end{array} \quad U_i := \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline 6 \\ \hline 5 \\ \hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} X [ i : 0 , 1 , 3 , 4 , 6 , 7 , 8 \\ U [ i : 1 , 4 , 5 , 6 , 5 , 4 , 3 \end{array}$$

Definicja wektora jednomianów

$$p(x) := \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}$$

$$p(x) : \langle C \rangle m$$

$$A := \sum_i \left( p(X_i) p(X_i)^T \right)$$

$$A : \langle S \rangle 4 \text{ i } [T] p(x[i]) p(x[i]) \langle C \rangle 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 29 & 175 \\ 29 & 175 & 1.163 \times 10^3 \\ 175 & 1.163 \times 10^3 & 8.131 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$B_{j,i} := p(X_i)_j$$

$$B [ j , i : p(x[i]) [ j$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 9 & 16 & 36 & 49 & 64 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie układu równań  $Aa=BU$ 

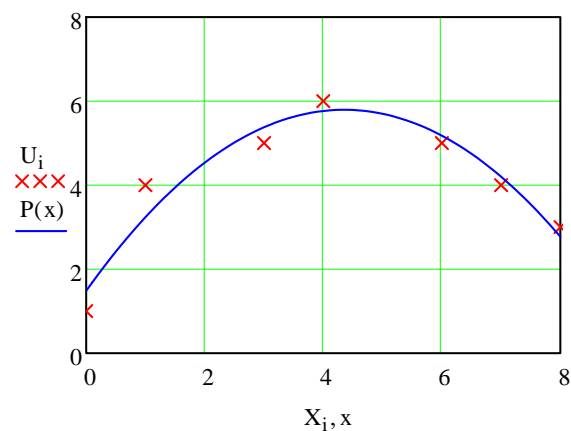
$$a := A^{-1} \cdot B \cdot U$$

$$a = \begin{pmatrix} 1.483 \\ 1.98 \\ -0.227 \end{pmatrix}$$

## Wartości funkcji i wykres wielomianu aproksymacyjnego

$$x := 0, 0.1 \dots 8$$

$$P(x) := a \cdot p(x)$$

**Rachunek macierzowy i wektorowy**

Ustalenie sposobu numerowania elementów macierzy

$$\text{ORIGIN} := 1$$

Definiowanie z użyciem niezerowych elementów macierzy lub wektora

$$V_1 := 1.1$$

$$V_3 := 3.3$$

$$V [ 1 : 1 ] = 1$$

$$V [ 3 : 3 ] = 3$$

$$V = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0 \\ 3.3 \end{pmatrix}$$

$$C_{1,1} := 2.3$$

$$C_{3,2} := 3.2$$

$$C = \begin{pmatrix} 2.3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3.2 \end{pmatrix}$$

Wstawianie macierzy

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D : \langle C \rangle M$$

Definicja macierzy jednostkowej

$$I := \text{identity}(3)$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transpozycja macierzy

$$E := D^T$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E : D \langle C \rangle 1$$

## Suma i różnica macierzy

$$F := C + E \quad F = \begin{pmatrix} 3.3 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4.2 \end{pmatrix}$$

$$G := C - E \quad G = \begin{pmatrix} 1.3 & -2 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2.2 \end{pmatrix}$$

## Iloczyn macierzy

$$H := C \cdot D \quad H = \begin{pmatrix} 2.3 & 4.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6.4 & 0 & 3.2 \end{pmatrix}$$

$$I := D \cdot C \quad I = \begin{pmatrix} 2.3 & 0 \\ 4.6 & 3.2 \end{pmatrix}$$

## Wyznaczniki macierzy

$$|H| = 0 \quad |I| = 7.36 \quad | \quad =$$

## Macierz odwrotna

$$J := I^{-1} \quad J = \begin{pmatrix} 0.435 & 0 \\ -0.625 & 0.313 \end{pmatrix}$$

$$I \cdot J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Operacje na podmacierzach

$$K := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

$$k1 := \text{submatrix}(K, 2, 3, 2, 3) \quad k1 = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$$

$$k2 := \text{submatrix}(K, 2, 3, 4, 4) \quad k2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

## Składanie macierzy

$$k3 := \text{augment}(k2, k1) \quad k3 = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 12 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

$$k4 := \text{stack}(k2^T, k1) \quad k4 = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 6 & 7 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$$

Wiersz i kolumna macierzy

$$k5 := K^{(2)} \quad k5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix} \quad k5 : K <C>6 \ 2$$

$$k6 := (K^T)^{(2)T} \quad k6 = (5 \ 6 \ 7 \ 8) \quad k6 : K <C>1 \ <C>6 \ 2 \ [S] \ <C>1$$

Macierze funkcji

$$Q(x) := \begin{pmatrix} x & x^2 \\ x^2 & x^3 \end{pmatrix}$$

Sprawdzenie macierzy (numerycznie i symbolicznie)

$$Q(0.5) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.125 \end{pmatrix} \quad Q\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Całkowanie macierzy funkcji

$$i := 1..2 \quad j := 1..2$$

$$M_{i,j} := \int_0^1 Q(x)_{i,j} dx \quad M = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.333 \\ 0.333 & 0.25 \end{pmatrix}$$

**Macierzowe rozwiązywanie układów równań liniowych**

$$\begin{cases} 5x + y + 3z = 20 \\ x - 27y + 3z = -4 \\ 2x + 3y + 2z = 6 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{B}$$

Definicja układu równań i rozwiązanie

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 27 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 20 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} := \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

Wyświetlenie wyników i sprawdzenie

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2.414 \\ -0.552 \\ 2.828 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 2.414 \quad x_2 = -0.552 \quad x_3 = 2.828$$



## Rozwiązywanie układów równań nieliniowych

Wartści początkowe niewiadomych

$$\underline{x} := 1 \qquad y := 1$$

Definicja układu równań i rozwiązanie

Given

$$x^2 + y^2 = 5 \qquad x^2 [S] + y^2 [S] <C>= 6$$

$$x + y = 2 \qquad x + y <C>= 2$$

$$\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} := \text{Find}(x, y)$$

$$x = -0.225 \qquad y = 2.225$$

## Operacje z macierzami boolowskimi

Definicja wskaźników

$$i := 1..5 \qquad j := 1..10$$

Zerowanie elementów macierzy

$$B1_{i,j} := 0$$

$$B1 =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Ustawianie elementów równych jeden

$$B1_{1,2} := 1 \quad B1_{2,3} := 1 \quad B1_{3,6} := 1 \quad B1_{4,7} := 1 \quad B1_{5,9} := 1$$

$$B1 =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

$$i := 1..5 \qquad j := 1..5$$

$$K_{i,j} := 10 \cdot i + j$$

$$K = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 \end{pmatrix}$$

$$\underline{K1} := B1^T \cdot K \cdot B1$$

$$K1 =$$

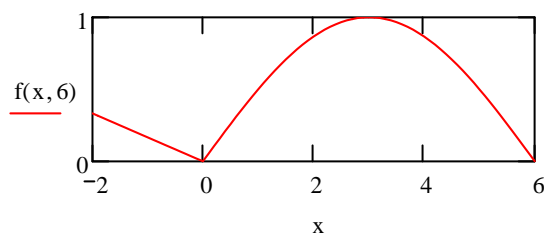
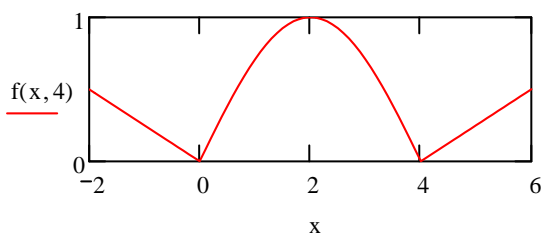
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	11	12	0	0	13	14	0	15	0
3	0	21	22	0	0	23	24	0	25	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	31	32	0	0	33	34	0	35	0
7	0	41	42	0	0	43	44	0	45	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	51	52	0	0	53	54	0	55	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

## Elementy programowania

instrukcja warunkowa if

$$\underline{f}(x, n) := \begin{cases} \sin\left(x \cdot \frac{\pi}{n}\right) & \text{if } 0 < x < n \\ \frac{-x}{n} & \text{if } x \leq 0 \\ \frac{x - n}{n} & \text{if } x \geq n \end{cases}$$

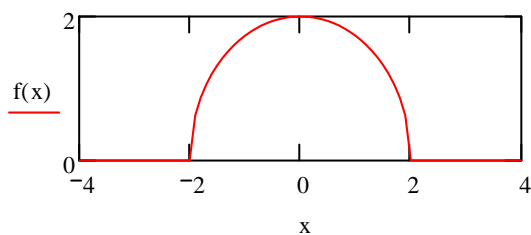
$$\underline{x} := -2, -1.9..6$$



instrukcja if - otherwise

$$\underline{f}(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } |x| > 2 \\ \sqrt{4 - x^2} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$x := -4, -3.9..4$$



pętla **for**

$$\text{Silnia}(n) := \begin{cases} s \leftarrow 1 \\ \text{for } i \in 1 \dots n \\ \quad s \leftarrow s \cdot i \\ \text{return } s \end{cases}$$

$$\text{Silnia}(3) = 6$$

$$\text{Silnia}(5) = 120$$

$$3! = 6$$

$$5! = 120$$

pętla **while**

$$\text{Pierwiastek}(x) := \begin{cases} \text{eps} \leftarrow 10^{-6} \\ r \leftarrow \frac{x}{2} \\ \text{rk} \leftarrow \frac{r}{2} + \frac{x}{2r} \\ \text{while } |rk - r| > \text{eps} \\ \quad \begin{cases} r \leftarrow rk \\ \text{rk} \leftarrow \frac{r}{2} + \frac{x}{2r} \end{cases} \\ \text{return } rk \end{cases}$$

$$\text{Pierwiastek}(4) = 2$$

$$\text{Pierwiastek}(5) = 2.236$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{5} = 2.236$$