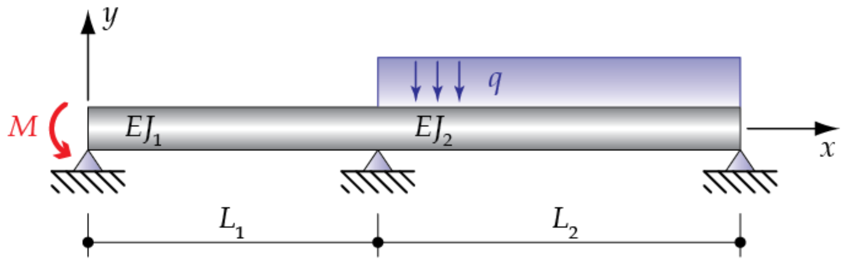
Elementy projektowania inżynierskiego
Rozwiązanie problemu belki zginanej metodą MES

Ustawienie sposobu numerowania elementów macierzy $\quad ORIGIN \equiv 1$

Belka zginana



Dane geometryczne, materiałowe i obciążenie

$L_1 := 6 \qquad J_1 := 5\cdot10^{-5} \qquad h_1 := 0.25$

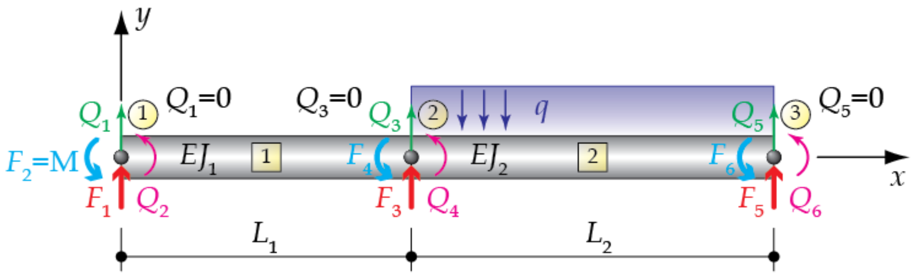
$L_2 := 8 \qquad J_2 := 1\cdot10^{-4} \qquad h_2 := 0.32$

$q := -10\cdot10^{3} \qquad M := 20\cdot10^{3}$

$E := 200\cdot10^{9}$

(aby porównać naprężenia z systemem Abaqus odczytujemy je w środku półek - w punkcie całkowania numerycznego)

Dyskretyzacja belki



Definicja macierzy sztywności i wektora równowazników węzłowych obciążenia

$$Ke(EJ,L) := \begin{pmatrix} \frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} & \frac{-12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} \\ \frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} & \frac{-6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} \\ \frac{-12EJ}{L^3} & \frac{-6EJ}{L^2} & \frac{12EJ}{L^3} & \frac{-6EJ}{L^2} \\ \frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} & \frac{-6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} \end{pmatrix} \qquad Pe(q,L) := \begin{pmatrix} \frac{q\cdot L}{2} \\ \frac{q\cdot L^2}{12} \\ \frac{q\cdot L}{2} \\ \frac{-q\cdot L^2}{12} \end{pmatrix}$$

Liczba węzłów, liczba węzłów elementu, liczba stopni swobody w węźle elementu

$l_n := 3 \qquad l_w := 2 \qquad l_q := 2$

Budowa macierzy Boole'a

$i := 1 .. l_w \cdot l_q$ $j := 1 .. l_n \cdot l_q$

$B1_{i,j} := 0$ $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B2_{i,j} := 0$ $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B1_{1,1} := 1$ $B1_{2,2} := 1$

$B1_{3,3} := 1$ $B1_{4,4} := 1$ $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B2_{1,3} := 1$ $B2_{2,4} := 1$

$B2_{3,5} := 1$ $B2_{4,6} := 1$ $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Obliczenie macierzy sztywności

$Ke_1 := Ke(E \cdot J_1, L_1)$ $Ke_1 = \begin{pmatrix} 5.556 \times 10^5 & 1.667 \times 10^6 & -5.556 \times 10^5 & 1.667 \times 10^6 \\ 1.667 \times 10^6 & 6.667 \times 10^6 & -1.667 \times 10^6 & 3.333 \times 10^6 \\ -5.556 \times 10^5 & -1.667 \times 10^6 & 5.556 \times 10^5 & -1.667 \times 10^6 \\ 1.667 \times 10^6 & 3.333 \times 10^6 & -1.667 \times 10^6 & 6.667 \times 10^6 \end{pmatrix}$

$Ke_2 := Ke(E \cdot J_2, L_2)$ $Ke_2 = \begin{pmatrix} 4.688 \times 10^5 & 1.875 \times 10^6 & -4.688 \times 10^5 & 1.875 \times 10^6 \\ 1.875 \times 10^6 & 1 \times 10^7 & -1.875 \times 10^6 & 5 \times 10^6 \\ -4.688 \times 10^5 & -1.875 \times 10^6 & 4.688 \times 10^5 & -1.875 \times 10^6 \\ 1.875 \times 10^6 & 5 \times 10^6 & -1.875 \times 10^6 & 1 \times 10^7 \end{pmatrix}$

Obliczenie równoważników węzłowych obciążenia

$Pe_1 := Pe(0, L_1)$ $Pe_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$Pe_2 := Pe(q, L_2)$

$$Pe_2 = \begin{pmatrix} -4 \times 10^4 \\ -5.333 \times 10^4 \\ -4 \times 10^4 \\ 5.333 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

Agregacja macierzy sztywności

$K := B_1{}^T \cdot Ke_1 \cdot B_1 + B_2{}^T \cdot Ke_2 \cdot B_2$

$$K = \begin{pmatrix} 5.556 \times 10^5 & 1.667 \times 10^6 & -5.556 \times 10^5 & 1.667 \times 10^6 & 0 & 0 \\ 1.667 \times 10^6 & 6.667 \times 10^6 & -1.667 \times 10^6 & 3.333 \times 10^6 & 0 & 0 \\ -5.556 \times 10^5 & -1.667 \times 10^6 & 1.024 \times 10^6 & 2.083 \times 10^5 & -4.688 \times 10^5 & 1.875 \times 10^6 \\ 1.667 \times 10^6 & 3.333 \times 10^6 & 2.083 \times 10^5 & 1.667 \times 10^7 & -1.875 \times 10^6 & 5 \times 10^6 \\ 0 & 0 & -4.688 \times 10^5 & -1.875 \times 10^6 & 4.688 \times 10^5 & -1.875 \times 10^6 \\ 0 & 0 & 1.875 \times 10^6 & 5 \times 10^6 & -1.875 \times 10^6 & 1 \times 10^7 \end{pmatrix}$$

Agregacja równoważników węzłowych obciążenia

$P := B_1{}^T \cdot Pe_1 + B_2{}^T \cdot Pe_2$

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \times 10^4 \\ -5.333 \times 10^4 \\ -4 \times 10^4 \\ 5.333 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

Budowa wektora sił węzłowych

$F_j := 0$

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$F_2 := M$

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \times 10^4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Uwzględnienie warunków brzegowych

$K_{wb} := K$ $\quad F_{wb} := F$ $\quad P_{wb} := P$

Na stopniu swobody o numerze 1

$K_{wb_{1,j}} := 0$ $\quad K_{wb_{j,1}} := 0$ $\quad K_{wb_{1,1}} := 1$

$F_{wb_1} := 0$ $\quad P_{wb_1} := 0$

Na stopniu swobody o numerze 3

$K_{wb_{3,j}} := 0$ $\quad K_{wb_{j,3}} := 0$ $\quad K_{wb_{3,3}} := 1$

$F_{wb_3} := 0$ $\quad P_{wb_3} := 0$

Na stopniu swobody o numerze 5

$K_{wb_{5,j}} := 0$ $\quad K_{wb_{j,5}} := 0$ $\quad K_{wb_{5,5}} := 1$

$F_{wb_5} := 0$ $\quad P_{wb_5} := 0$

$$K_{wb} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.667 \times 10^{6} & 0 & 3.333 \times 10^{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.333 \times 10^{6} & 0 & 1.667 \times 10^{7} & 0 & 5 \times 10^{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \times 10^{6} & 0 & 1 \times 10^{7} \end{pmatrix}$$

$$F_{wb} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \times 10^{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P_{wb} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5.333 \times 10^{4} \\ 0 \\ 5.333 \times 10^{4} \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie układu równań, obliczenie reakcji

$$Q := K_{wb}^{-1} \cdot \left(P_{wb} + F_{wb}\right) \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 6.6 \times 10^{-3} \\ 0 \\ -7.2 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 8.933 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$R := K \cdot Q - P \qquad R = \begin{pmatrix} -1000 \times 10^{0} \\ 20 \times 10^{3} \\ 44.25 \times 10^{3} \\ 21.828 \times 10^{-12} \\ 36.75 \times 10^{3} \\ -14.552 \times 10^{-12} \end{pmatrix}$$

Obliczenie wektorów przemieszczeń dla elementów

$$Q_1 := B_1 \cdot Q \qquad Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6.6 \times 10^{-3} \\ 0 \\ -7.2 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$Q_2 := B_2 \cdot Q \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -7.2 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 8.933 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Definicja wektora funkcji kształtu

$$N_1(x,L) := 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \qquad N_2(x,L) := x \cdot \left[1 - 2\left(\frac{x}{L}\right) + \left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

$$N_3(x,L) := 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \qquad N_4(x,L) := x \cdot \left[-\frac{x}{L} + \left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

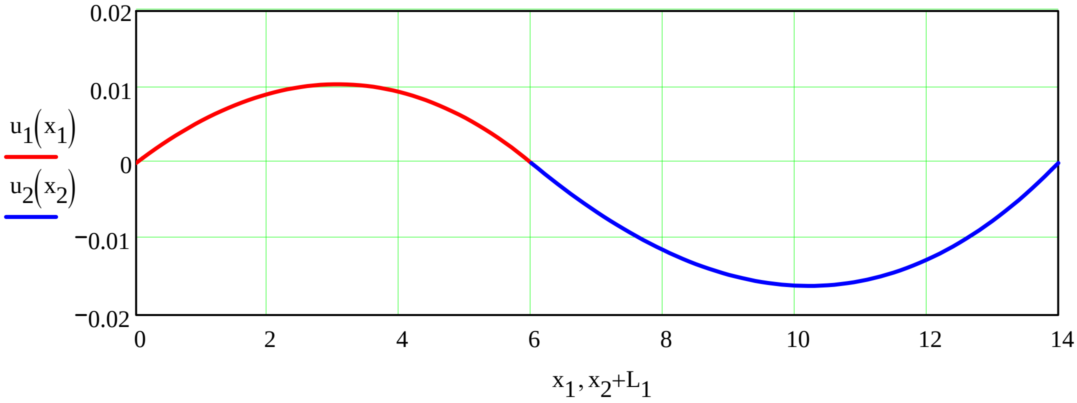
$$N(x,L) := \begin{pmatrix} N_1(x,L) & N_2(x,L) & N_3(x,L) & N_4(x,L) \end{pmatrix}$$

Obliczenie funkcji przemieszczeń w elementach

$$u_1(x) := N(x, L_1) \cdot Q_1 \qquad u_2(x) := N(x, L_2)\, Q_2$$

Wykres przemieszczenia

$$x_1 := 0, 0 + 0.1 .. L_1 \qquad x_2 := 0, 0 + 0.1 .. L_2$$



Obliczenie wektorów sił węzłowych w elementach

$$F_1 := Ke_1 \cdot Q_1 - Pe_1 \qquad F_1 = \begin{pmatrix} -1000 \times 10^{0} \\ 20 \times 10^{3} \\ 1000 \times 10^{0} \\ -26 \times 10^{3} \end{pmatrix}$$

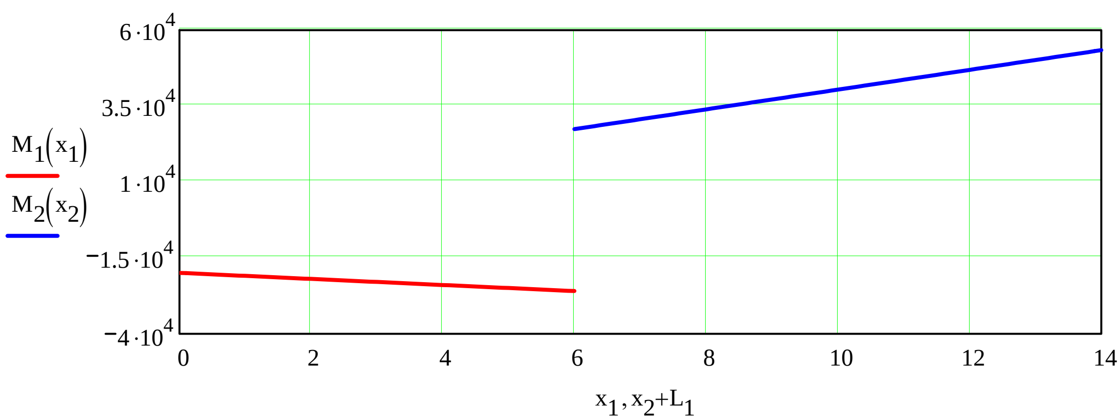
$$F_2 := Ke_2 \cdot Q_2 - Pe_2 \qquad F_2 = \begin{pmatrix} 43.25 \times 10^{3} \\ 26 \times 10^{3} \\ 36.75 \times 10^{3} \\ -14.552 \times 10^{-12} \end{pmatrix}$$

Obliczenie momentu gnącego

$$M_1(x) := E \cdot J_1 \cdot \left(\frac{d^2}{dx^2} u_1(x) \right) \qquad M_2(x) := E \cdot J_2 \cdot \left(\frac{d^2}{dx^2} u_2(x) \right)$$

$$M_1(0) = -20 \times 10^{3} \qquad M_2(0) = 27.333 \times 10^{3}$$

$$M_1(L_1) = -26 \times 10^{3} \qquad M_2(L_2) = 53.333 \times 10^{3}$$



Obliczenie siły stycznej

$V_1(x) := E \cdot J_1 \cdot \left(\frac{d^3}{dx^3} u_1(x)\right)$

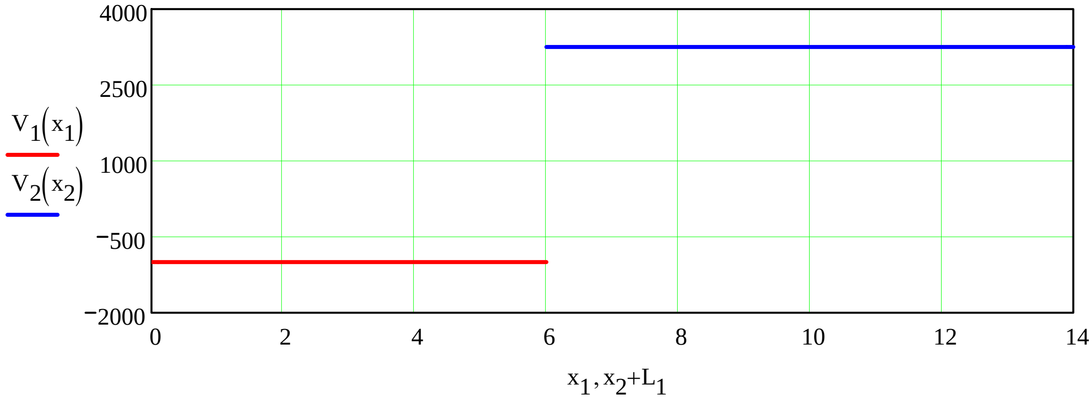
$V_2(x) := E \cdot J_2 \cdot \left(\frac{d^3}{dx^3} u_2(x)\right)$

$V_1(0) = -1 \times 10^3$

$V_2(0) = 3.25 \times 10^3$

$V_1(L_1) = -1000 \times 10^0$

$V_2(L_2) = 3.25 \times 10^3$



Obliczenie naprężeń normalnych

$w_1 := \frac{J_1}{0.5 \cdot h_1}$

$w_2 := \frac{J_2}{0.5 \cdot h_2}$

$\sigma_1(x) := \frac{M_1(x)}{w_1}$

$\sigma_2(x) := \frac{M_2(x)}{w_2}$

$\sigma_1(0) = -50 \times 10^6$

$\sigma_2(0) = 43.733 \times 10^6$

$\sigma_1(L_1) = -65 \times 10^6$

$\sigma_2(L_2) = 85.333 \times 10^6$