Politechnika Świętokrzyska

Kielce University of Technology

Obowiązkowa matura z matematyki

czyli nie taki diabeł straszny...

Jacek Człapiński, Henryk Dąbrowski

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

ŚBRR

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt „W drodze do kariery z Politechniką Świętokrzyską
– szanse na lepszą przyszłość uczniów szkół ponadgimnazjalnych"
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Skrypt bezpłatny.

Opracowany i wydrukowany w ramach projektu „W drodze do kariery z Politechniką Świętokrzyską – szanse na lepszą przyszłość uczniów szkół ponadgimnazjalnych”, współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Program Operacyjny Kapitał Ludzki Priorytet IX Działanie 9.1 Poddziałanie 9.1.2
umowa ze Świętokrzyskim Biurem Rozwoju Regionalnego
UDA – POKL.09.01.02.-26-112/10-00

SPIS TREŚCI

Rok 2010 wyznaczył datę powrotu do obowiązkowego egzaminu maturalnego z matematyki. Umiejętności, które są sprawdzane na maturze z matematyki, zostały opisane w Podstawie programowej kształcenia ogólnego, jednak częste zmiany tej regulacji prawnej opisującej wymagania egzaminacyjne sprawiają, że zarówno abiturienci przystępujący do egzaminu maturalnego, jak i ich nauczyciele powinni szczególnie uważnie śledzić zapisy **Informatora o egzaminie maturalnym z matematyki**. Informator ten, przygotowany w roku 2008, oprócz zapisów standardów egzaminacyjnych i opisu wymagań, zawiera przykładowe arkusze egzaminacyjne i zestaw 108 zadań do rozwiązania przez uczniów.

Na egzaminie maturalnym zdający może korzystać z Zestawu Wybranych Wzorów Matematycznych dopuszczonych do użytku decyzją dyrektora Centralnej Komisji Egzaminacyjnej, nazywanym dalej *Zestawem wzorów* lub krótko *Zestawem*. Jest niezmiernie ważne, by zdający dokładnie zapoznali się z tym *Zestawem*, który został przygotowany dla potrzeb egzaminu maturalnego z matematyki począwszy od roku 2010. **Zawarte tam wzory mogą być przydatne do rozwiązania zadań w trakcie egzaminu, ale także podczas przygotowań do matury.** Oprócz wybranych wzorów znajdują się tam również wartości funkcji trygonometrycznych w układzie tabelarycznym. Z zawartością *Zestawu wzorów* zdający z pewnością zetknęli się podczas próbnych egzaminów. Jego wersja elektroniczna jest dostępna na stronie internetowej CKE oraz stronach internetowych okręgowych komisji egzaminacyjnych.

Przygotowanie do zdawania egzaminu maturalnego powinno odbywać się również poprzez analizę arkuszy egzaminacyjnych, które w nowej formule, zawierającej także zadania zamknięte, zostały przygotowane i wykorzystane przez Centralną Komisję Egzaminacyjną w poprzednich sesjach egzaminacyjnych oraz w trakcie ogólnopolskich próbnych matur z matematyki.

Materiał, który właśnie trafia do Waszych rąk nie jest zbiorem zadań. Jest przewodnikiem, który ma służyć przypomnieniu i opisaniu wybranych, podstawowych wymagań egzaminacyjnych. Aby osiągnąć ten cel, autorzy oparli się głównie o zadania, które zostały opublikowane przez CKE w arkuszach maturalnych w trakcie majowej i sierpniowej sesji egzaminacyjnej, pojawiły się podczas próbnych matur w latach 2009 i 2010 oraz zostały zaproponowane przez ekspertów w *Informatorze o egzaminie maturalnym od roku 2010 z matematyki*. Z uwagi na ograniczoną objętość publikacji wybraliśmy i omówiliśmy niektóre wymagania egzaminacyjne w każdym z działów podstawy programowej. Z tego samego powodu do każdego zadania podajemy tylko jeden sposób rozwiązania opatrzony jednak **niezbędnym komentarzem, który pozwala na jego samodzielną analizę przez uczniów przygotowujących się do egzaminu.**

Wybrane umiejętności, które są opisane w wymaganiach, a dotychczas jeszcze nie były sprawdzane podczas egzaminu maturalnego czy to próbnego, czy też właściwego, zostały zilustrowane zadaniami ułożonymi przez autorów niniejszego materiału.

Zamieszczone i rozwiązane zadania ilustrują umiejętności podstawowe, zarówno jeżeli chodzi o poziom egzaminu, jak i stopień ich złożoności.

W niniejszym opracowaniu autorzy świadomie położyli nacisk na zadania z zakresu dwóch pierwszych standardów wymagań egzaminacyjnych. Nieliczne z zadań z pierwszych dziewiętnastu rozdziałów odwołują się do umiejętności modelowania matematycznego, tworzenia strategii, czy też przeprowadzenia rozumowania. Te umiejętności zostały zilustrowane w rozdziale dwudziestym, w którym znajdują się przykłady zadań adresowane głównie do uczniów, którzy będą zdawali egzamin na poziomie rozszerzonym.

Te z zadań, które zostały zaczerpnięte z arkuszy egzaminacyjnych lub Informatora maturalnego, zostały opatrzone krótką „metryczką” wskazującą na źródło. W prezentowanych rozwiązaniach, tam gdzie jest to zdaniem autorów niezbędne, pojawiają się w komentarzu elementy teorii. W innych przypadkach odsyłamy Czytelnika do *Zestawu wzorów*, gdzie można bez trudu odnaleźć niezbędne fragmenty teorii. Cytując wzory autorzy zazwyczaj pomijają odpowiednie założenia, by występujące nadmiernie symbole nie przysłaniały istoty rozwiązania zadania.

Pragniemy w tym miejscu **podziękować Pani Danucie Pyrek** – nauczycielowi matematyki IV Liceum Ogólnokształcącego im. Hanki Sawickiej w Kielcach i doradcy metodycznemu, która zainspirowała nas do pracy nad tą publikacją, a w trakcie jej pisania była wytrwałym i wnikliwym doradcą.

Drogi Czytelniku, mamy nadzieję, że nie zdziwi Cię zawartość pierwszego rozdziału. Wiemy z doświadczenia, że główną przyczyną kłopotów wielu uczniów na maturze, jest brak podstawowych sprawności rachunkowych. Czego Jaś się nie nauczył, tego niech po prostu nauczy się Janek. Lepiej późno niż wcale. Wtedy zapewne okaże się, że rzeczywiście nie taki diabeł straszny, jak go malują.

Powodzenia!

Autorzy

I. POPRAWNOŚĆ DZIAŁAŃ, WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

Wśród opisu szczegółowych wymagań maturalnych z matematyki znajdują się również te odnoszące się do sprawności rachunkowej. Niezmiernie często błędy w tym zakresie powodują, że zdający nie otrzymuje za swoje rozwiązanie części lub całości punktów. Niekiedy popełnione błędy uniemożliwiają rozwiązanie zadania. Warto więc przypomnieć podstawy.

Obliczając wartości wyrażeń algebraicznych, należy pamiętać o właściwej kolejności wykonywania działań:

1. **Potęgowanie wykonujemy przed mnożeniem i dzieleniem.**
2. **Gdy nie ma nawiasów, mnożenie i dzielenie wykonujemy od lewej do prawej.**
3. **Mnożenie i dzielenie wykonujemy przed dodawaniem i odejmowaniem.**
4. **Zaczynamy od działań w tych nawiasach, które nie zawierają innych nawiasów**.

Przyjrzyjmy się kilku zadaniom.

Zadanie 1.

Oblicz $3-\frac{1}{25}:\frac{1}{5}\cdot 15$.

Rozwiązanie

Pamiętając o zasadzie opisanej w punkcie 3, najpierw „zajmiemy się" mnożeniem i dzieleniem. Ale kolejne zapisy będą uwzględniały także zasadę wyrażoną w punkcie 2.

$$3-\frac{1}{25}:\frac{1}{5}\cdot 15=3-\frac{1}{25}\cdot\frac{5}{1}\cdot 15$$

Zauważmy, że dzielenie przez $\frac{1}{5}$ zastąpiliśmy mnożeniem przez liczbę odwrotną do tego ułamka, czyli przez $\frac{5}{1}$.

$$3-\frac{1}{25}\cdot\frac{5}{1}\cdot 15=3-\frac{1}{\cancel{25}_5}\cdot\frac{\cancel{5}_1}{1}\cdot 15=3-\frac{1}{5}\cdot 15=3-\frac{1}{\cancel{5}_1}\cdot\frac{\cancel{15}_3}{1}$$

Zauważmy, że liczbę 15 zapisaliśmy jako ułamek $\frac{15}{1}$. W kilku kolejnych zadaniach będziemy przed wykonaniem działań dokonywali zamiany liczby całkowitej na ułamek o mianowniku 1. Jednak, przy biegłości rachunkowej, można skracać „od razu" $\frac{1}{\cancel{5}_1}\cdot\cancel{15}_3$.

Po wykonaniu mnożenia i skróceniu odpowiednich ułamków, możemy przejść do odejmowania.

$$3-\frac{1}{\cancel{5}_1}\cdot\frac{\cancel{15}_3}{1}=3-\frac{3}{1}=3-3=0.$$

Zapiszmy poniżej całość operacji rachunkowych w tym przykładzie.

$$3-\frac{1}{25}:\frac{1}{5}\cdot 15=3-\frac{1}{25}\cdot\frac{5}{1}\cdot 15=3-\frac{1}{\cancel{25}_5}\cdot\frac{\cancel{5}_1}{1}\cdot 15=3-\frac{1}{5}\cdot 15=3-\frac{1}{\cancel{5}_1}\cdot\frac{\cancel{15}_3}{1}=3-\frac{3}{1}=3-3=0.$$

Zadanie 2.

Oblicz $(-2)^2\cdot 3:(7-4)^2$.

Rozwiązanie

Najpierw wykonamy, zgodnie z zasadą 4, działanie w nawiasie otrzymując $(-2)^2\cdot 3:(3)^2$, teraz zgodnie z zasadą 1 podniesiemy do kwadratu, pamiętając o wyniku z przykładu 4 i otrzymamy $4\cdot 3:9$, i wreszcie obliczymy wartość stosując zasadę 2:

$$4\cdot 3:9=4\cdot 3\cdot\frac{1}{9}=12\cdot\frac{1}{9}=\frac{12}{1}\cdot\frac{1}{9}=\frac{\cancel{12}_4}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{9}_3}=\frac{4}{1}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}.$$

Zadanie 3.

Oblicz $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)^2$.

Rozwiązanie

Wykonamy najpierw, zgodnie z zasadą 4, działanie w nawiasie, a następnie podniesiemy do kwadratu.

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)^2=\left(\frac{1\cdot 5}{15}+\frac{2\cdot 3}{15}\right)^2=\left(\frac{5}{15}+\frac{6}{15}\right)^2=\left(\frac{11}{15}\right)^2=\frac{121}{225}.$$

Zadanie 4.

Oblicz $\sqrt{\frac{144}{49}}\cdot\sqrt{196}$.

Rozwiązanie

Obliczamy oba pierwiastki i mamy $\sqrt{\frac{144}{49}}\cdot\sqrt{196}=\frac{12}{7}\cdot 14=\frac{12}{\cancel{7}_1}\cdot\frac{\cancel{14}_2}{1}=\frac{12}{1}\cdot\frac{2}{1}=\frac{24}{1}=24$

Zadanie 5.

Oblicz $\sqrt{16+9}$.

Rozwiązanie

Obliczając najpierw wartość sumy pod pierwiastkiem otrzymujemy $\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$.

W żadnym wypadku nie można zapisać $\xcancel{\sqrt{16+9}=\sqrt{16}+\sqrt{9}}$. Pierwiastek sumy nie jest zazwyczaj sumą pierwiastków.

Zadanie 6.

Oblicz $\sqrt{1\frac{9}{16}}$.

Rozwiązanie

Zamienimy liczbę mieszaną pod pierwiastkiem na ułamek niewłaściwy $1\frac{9}{16}=\frac{25}{16}$. Wówczas otrzymujemy $\sqrt{1\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{25}{16}}$, a po skorzystaniu z twierdzenia o pierwiastku ilorazu mamy

$$\sqrt{1\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}}=\frac{5}{4}.$$

W żadnym razie nie wolno zapisać $\cancel{\sqrt{1\frac{9}{16}}=\sqrt{1}\cdot\sqrt{\frac{9}{16}}}$. Ułamek $1\frac{9}{16}$ to nie to samo, co iloczyn $1\cdot\frac{9}{16}$

Przejdźmy teraz do przekształcania wyrażeń algebraicznych. Przypominamy tutaj podstawowe zasady przekształceń i doskonalimy umiejętność stosowania wzorów skróconego mnożenia (zamieszczone są w *Zestawie wzorów*). Obliczając wartości wyrażeń algebraicznych, należy pamiętać o właściwej kolejności wykonywania działań, o czym była mowa wcześniej, oraz uważać przy redukcji wyrazów podobnych.

Przejdźmy teraz do omówienia zadań.

Zadanie 7.

Wykonaj działania i przeprowadź redukcję wyrazów podobnych $\frac{2x-6y}{4}-2\left(\frac{1}{2}x-y\right)$.

Rozwiązanie

Popatrzmy teraz na ułamek $\frac{2x-6y}{4}$. Zanim skorzystamy z rozdzielności dzielenia względem dodawania skrócimy ten ułamek. W tym celu wyłączymy w liczniku przed nawias liczbę 2. Wtedy mamy

$$\frac{2x-6y}{4}=\frac{2(x-3y)}{4}=\frac{\cancel{2}_1(x-3y)}{\cancel{4}_2}=\frac{1\cdot(x-3y)}{2}=\frac{x-3y}{2}.$$

Teraz zapiszemy ten ułamek jako różnicę dwóch ułamków $\frac{x}{2}-\frac{3y}{2}$.

Wracając do wyjściowego wyrażenia mamy

$$\frac{2x-6y}{4}-2\left(\frac{1}{2}x-y\right)=\frac{x}{2}-\frac{3y}{2}-2\cdot\frac{1}{2}\cdot x-2\cdot(-y)=\frac{x}{2}-\frac{3y}{2}-\cancel{2}_1\cdot\frac{1}{\cancel{2}_1}\cdot x+2\cdot y=$$
$$=\frac{x}{2}-\frac{3y}{2}-\frac{1}{1}\cdot x+2\cdot y=\frac{x}{2}-x-\frac{3y}{2}+2y=\frac{x}{2}-\frac{2x}{2}-\frac{3y}{2}+\frac{4y}{2}=-\frac{x}{2}+\frac{y}{2}.$$

Zadanie 8.

Wykonaj działanie i przeprowadź redukcję wyrazów podobnych $(2x+3)^2$.

Rozwiązanie

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy $(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$ (patrz strona 3 w *Zestawie wzorów*). W naszym przypadku $a=2x$, $b=3$. Wtedy

$$(2x+3)^2=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 3+3^2=4x^2+12x+9.$$

Okazało się, że nie było potrzeby redukowania wyrazów podobnych.

Zadanie 9.

Wykonaj działanie i przeprowadź redukcję wyrazów podobnych $(-3x-2)^2$.

Rozwiązanie.

Tego typu przykłady z „minusami" sprawiają zazwyczaj kłopoty. Biorą się one najczęściej z pomieszania ról, jakie w wyrażeniu odgrywają te „minusy".

Potraktujmy wyrażenie w nawiasie jak różnicę, czyli wyrażenie, które ma postać $a-b$. Dla podkreślenia, gdzie jest w wyrażeniu $-2x-3$ odjemna *a* i odjemnik *b* wstawmy odpowiednie nawiasy. Mamy zatem $-2x-3=(-2x)-(3)$.

Zastosujemy teraz **wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy** $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, który także znajdziemy na stronie 3 w *Zestawie wzorów*. Dostajemy wówczas

$$\left((-2x)-(3)\right)^2=(-2x)^2-2(-2x)\cdot(3)+(3)^2=4x^2+12x+9\,.$$

Rozwiążemy teraz zadanie maturalne sprawdzające bezpośrednio umiejętność przekształcania wyrażeń algebraicznych.

Zadanie 10. (Egzamin maturalny – sierpień 2010, s. 2, zadanie 6)

Kwadrat liczby $x=2-\sqrt{3}$ jest równy

A. $7-4\sqrt{3}$ **B.** $7+4\sqrt{3}$ **C.** 1 **D.** 7

Rozwiązanie

Mamy obliczyć wartość wyrażenia $\left(2-\sqrt{3}\right)^2$. Zastosujemy w tym celu przytoczony już poprzednio wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy $(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$.

W naszym przypadku $a=2, b=\sqrt{3}$. Wtedy

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^2=2^2-2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}^2=4-4\sqrt{3}+3=7-4\sqrt{3}\,.$$

Zaznaczamy odpowiedź **A**.

Zadanie 11.

Przedstaw w postaci iloczynu wyrażenie $25-9x^2$.

Rozwiązanie

Rozkład tego wyrażenia na czynniki uzyskamy zapisując najpierw nasze wyrażenie jako różnicę dwóch kwadratów

$$25-9x^2=5^2-(3x)^2,$$

a następnie wykorzystując wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów

$$25-9x^2=5^2-(3x)^2=(5-3x)(5+3x)\,.$$

(wyrażenie $5^2-(3x)^2$ jest wyrażeniem „typu a^2-b^2").

Zastosujemy teraz w zadaniu 12 wzór na sumę sześcianów, który znajduje się w *Zestawie wzorów* na stronie 3

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Zadanie 12.

Przedstaw w postaci iloczynu wyrażenie $27 + 64x^3$.

Rozwiązanie

Zapiszmy nasze wyrażenie jako sumę dwóch sześcianów: $27 + 64x^3 = 3^3 + (4x)^3$. Mamy teraz wyrażenie „typu $a^3 + b^3$”. Korzystając z cytowanego wzoru na sumę sześcianów mamy

$$27 + 64x^3 = 3^3 + (4x)^3 = (3+4x)[3^2 - 3\cdot(4x) + (4x)^2] = (3+4x)(9 - 12x + 16x^2).$$

Zastanówmy się, czy czynnik $9 - 12x + 16x^2$ (jest to trójmian kwadratowy) możemy jeszcze rozłożyć na iloczyn czynników liniowych. Wykorzystamy tu twierdzenie podane w *Zestawie wzorów* na stronie 4, mówiące o tym, że trójmian kwadratowy $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, można rozłożyć na czynniki liniowe tylko wtedy, gdy wyróżnik tego trójmianu jest nieujemny, czyli gdy $\Delta \geq 0$. Ponieważ wyróżnik naszego trójmianu jest równy $\Delta = (-12)^2 - 4\cdot 16\cdot 9 = 144 - 576 < 0$, więc trójmianu $9 - 12x + 16x^2$ nie da się zapisać w postaci iloczynu czynników liniowych. Tym samym rozkład wyrażenia $27 + 64x^3$, jaki uzyskaliśmy jest ostateczny. Więcej informacji o trójmianie kwadratowym znajduje się w rozdziale *Funkcja kwadratowa*.

II. POTĘGI I LOGARYTMY

Zanim przejdziemy do zadań maturalnych, przypomnimy kilka podstawowych zasad dotyczących działań na potęgach i pierwiastkach. Będziemy korzystać z praw działań na potęgach, dlatego warto w tym miejscu mieć przed oczami zależności podane w *Zestawie wzorów* na stronie 1.

Zadanie 1.

Oblicz $2^{-3}+4^{-1}$.

Rozwiązanie

Pamiętając o zależności $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, możemy zapisać $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$ oraz $4^{-1}=\frac{1}{4^1}=\frac{1}{4}$.

Obliczamy szukaną wartość

$$2^{-3}+4^{-1}=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{1}{8}+\frac{2}{8}=\frac{3}{8}.$$

Zadanie 2.

Oblicz $9^{\frac{1}{2}}-5\cdot 8^{\frac{1}{3}}$.

Rozwiązanie

W *Zestawie wzorów* podana jest równość $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, zatem $9^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{9^1}=\sqrt{9}=3$ oraz $8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8^1}=\sqrt[3]{8}=2$. Możemy już teraz obliczyć szukaną wartość

$$9^{\frac{1}{2}}-5\cdot 8^{\frac{1}{3}}=3-5\cdot 2=3-10=-7.$$

Ale można też policzyć inaczej.

Ponieważ $\left(a^r\right)^s=a^{r\cdot s}$ oraz $9=3^2$ i $8=2^3$ więc

$$9^{\frac{1}{2}}-5\cdot 8^{\frac{1}{3}}=\left(3^2\right)^{\frac{1}{2}}-5\cdot\left(2^3\right)^{\frac{1}{3}}=3^{2\cdot\frac{1}{2}}-5\cdot 2^{3\cdot\frac{1}{3}}=3^1-5\cdot 2^1=3-5\cdot 2=-7.$$

Zadanie 3.

Iloczyn $64^{-\frac{1}{5}}\cdot\sqrt[5]{2}$ zapisz w postaci potęgi liczby 2.

Rozwiązanie

Ponieważ $64=2^6$, więc $64^{-\frac{1}{5}}=\left(2^6\right)^{-\frac{1}{5}}=2^{-\frac{6}{5}}$. Liczbę $\sqrt[5]{2}$ możemy zapisać w postaci $\sqrt[5]{2}=2^{\frac{1}{5}}$.

Ponieważ $a^r\cdot a^s=a^{r+s}$, więc

$$64^{-\frac{1}{5}}\cdot\sqrt[5]{2}=2^{-\frac{6}{5}}\cdot 2^{\frac{1}{5}}=2^{-\frac{6}{5}+\frac{1}{5}}=2^{\frac{-6+1}{5}}=2^{\frac{-5}{5}}=2^{-1}.$$

Zadanie 4. (Informator maturalny, s. 75, zadanie 1)

Liczba $3^{30}\cdot 9^{90}$ jest równa

A. 3^{210} **B.** 3^{300} **C.** 9^{120} **D.** 27^{2700}

Rozwiązanie

Ponownie skorzystamy ze wzorów $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ oraz $\left(a^r\right)^s = a^{r\cdot s}$. Wówczas

$$3^{30} \cdot 9^{90} = 3^{30} \cdot \left(3^2\right)^{90} = 3^{30} \cdot 3^{2\cdot 90} = 3^{30} \cdot 3^{180} = 3^{30+180} = 3^{210}.$$

Zaznaczamy odpowiedź **A**.

Proponujemy samodzielnie rozwiązać zadanie z egzaminu maturalnego z sierpnia 2010 r. oraz próbnego egzaminu przeprowadzonego w listopadzie 2009r.

Zadanie 5. (Egzamin maturalny – sierpień 2010, s. 2, zadanie 2)

Iloczyn $81^2 \cdot 9^4$ jest równy

A. 3^4 **B.** 3^0 **C.** 3^{16} **D.** 3^{14}

Zadanie 6. (Próbny egzamin maturalny – listopad 2009, s. 2, zadanie 4)

Iloraz $32^{-3} : \left(\frac{1}{8}\right)^4$ jest równy

A. 2^{-27} **B.** 2^{-3} **C.** 2^3 **D.** 2^{27}

W maju 2010 roku zdający mieli do rozwiązania poniższe zadanie.

Zadanie 7. (Egzamin maturalny – maj 2010, s. 2, zadanie 3)

Liczba $\left(\frac{2^{-2} \cdot 3^{-1}}{2^{-1} \cdot 3^{-2}}\right)^0$ jest równa

A. 1 **B.** 4 **C.** 9 **D.** 36

Rozwiązanie

Zanim zdający zacznie poprawnie stosować zasady wykonywania działań, musi uważnie przeczytać treść polecenia. Kluczem do „szybkiego” zaznaczenia poprawnej odpowiedzi jest wykorzystanie definicji potęgi o wykładniku równym 0, czyli $a^0 = 1$ dla dowolnej liczby $a \neq 0$ (patrz *Zestaw wzorów*). Nie ma potrzeby obliczania wartości wyrażenia w nawiasie, by mieć pewność, że liczba ta nie jest zerem, gdyż w zaproponowanych do wyboru odpowiedziach, nie ma odpowiedzi typu „działanie nie jest wykonalne”. Możemy zatem od razu zapisać, że wartość naszego wyrażenia jest równa 1 i zaznaczyć poprawną odpowiedź **A**.

Zanim przejdziemy do działań na logarytmach, przyjrzyjmy się zadaniu, w którym działać będziemy na pierwiastkach. Podobne zadanie pojawiło się już w rozdziale poświęconym przekształceniom wyrażeń algebraicznych i stosowaniu wzorów skróconego mnożenia, ale aby przypomnieć, że **pierwiastek arytmetyczny jest w istocie potęgą**, o czym wspomnieliśmy w zadaniu 2 tego rozdziału, rozwiążemy poniższe zadanie.

Zadanie 8. (Próbny egzamin maturalny – listopad 2010, s. 2, zadanie 5)

Kwadrat liczby $x = 5 + 2\sqrt{3}$ jest równy

A. 37 **B.** $25 + 4\sqrt{3}$ **C.** $37 + 20\sqrt{3}$ **D.** 147

Rozwiązanie

Mamy obliczyć wartość wyrażenia $\left(5+2\sqrt{3}\right)^2$. Zastosujemy w tym celu wzór skróconego mnożenia $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ (patrz *Zestaw wzorów*). W naszym przypadku $a=5$, $b=2\sqrt{3}$. Wtedy

$$\left(5+2\sqrt{3}\right)^2 = 5^2+2\cdot 5\cdot 2\sqrt{3}+\left(2\sqrt{3}\right)^2 .$$

Ponieważ $\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 2^2\cdot\sqrt{3}^2$, więc

$$5^2+2\cdot 5\cdot 2\sqrt{3}+\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 25+20\sqrt{3}+4\cdot 3 = 37+20\sqrt{3} .$$

Zaznaczamy odpowiedź **C**.

Przejdźmy teraz do logarytmów. Zaczniemy od rozwiązania zadania z próbnego egzaminu maturalnego przeprowadzonego w 2009 roku.

Zadanie 9. (Próbny egzamin maturalny – listopad 2009, s. 2, zadanie 5)

O liczbie x wiadomo, że $\log_3 x = 9$. Zatem

A. $x=2$ **B.** $x=\frac{1}{2}$ **C.** $x=3^9$ **D.** $x=9^3$

Rozwiązanie

Rozwiązanie odwołuje się bezpośrednio do definicji logarytmu (patrz strona 2 w *Zestawie wzorów*). Przypomnijmy, że $\log_a c = b \Leftrightarrow a^b = c$. Zatem w naszym zadaniu mamy $\log_3 x = 9 \Leftrightarrow 3^9 = x$. Zaznaczamy odpowiedź **C**.

Rozwiązanie poniższych zadań będzie wymagało stosowania praw działań na logarytmach, które w szczególności podane są na stronie 2 w *Zestawie wzorów*.

Zadanie 10. (Informator maturalny, s. 75, zadanie 3)

Liczba $\log 24$ jest równa

A. $2\log 2+\log 20$ **B.** $\log 6+2\log 2$ **C.** $2\log 6-\log 12$ **D.** $\log 30-\log 6$

Rozwiązanie

Przed rozwiązaniem warto przypomnieć, że brak wskazania w poleceniu podstawy logarytmu oznacza, że jest to logarytm dziesiętny, czyli jego podstawa jest równa 10.

Ponieważ $24 = 4\cdot 6$, więc mamy obliczyć logarytm iloczynu. Korzystając ze wzoru $\log_a\left(x\cdot y\right) = \log_a x+\log_a y$, otrzymujemy $\log\left(4\cdot 6\right) = \log 4+\log 6$.

Pozostaje jeszcze wykorzystać wzór na logarytm potęgi: $\log_a x^r = r\cdot\log_a x$, dla zapisania w innej postaci liczby $\log 4$. Ponieważ $4=2^2$, więc $\log 4 = \log 2^2 = 2\cdot\log 2$. Możemy już teraz zapisać liczbę $\log 24$ w postaci $2\log 2+\log 6$. Zaznaczamy odpowiedź **B**.

Zadanie 11. (Próbny egzamin maturalny – listopad 2010, s. 2, zadanie 6)

Liczba $\log_5 5 - \log_5 125$ jest równa

A. -2 **B.** -1 **C.** $\frac{1}{25}$ **D.** 4

Rozwiązanie

Wykorzystamy wzór na różnicę logarytmów: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ (*Zestaw wzorów*, strona 2). Wówczas $\log_5 5 - \log_5 125 = \log_5 \frac{5}{125} = \log_5 \frac{1}{25}$. Teraz możemy albo skorzystać z definicji logarytmu, i wtedy mamy $\log_5 \frac{1}{25} = x \Leftrightarrow 5^x = \frac{1}{25}$, czyli $5^x = 5^{-2}$, więc $x = -2$, albo też wykorzystamy wzór na logarytm potęgi, a wtedy mamy
$\log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = -2\log_5 5 = -2 \cdot 1 = -2$, bo $\log_5 5 = 1$.

Zaznaczamy odpowiedź **A**.

Zadanie 12.

Liczba $\log_3 27 - \log_2 8$ jest równa

A. 0 **B.** $\frac{27}{8}$ **C.** 5 **D.** 19

Rozwiązanie

Nie możemy skorzystać ze wzoru $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, bo **logarytmy nie mają jednakowych podstaw**. Zadanie rozwiążemy obliczając najpierw oba logarytmy występujące w zapisanej różnicy. Zacznijmy od $\log_3 27$. Z definicji (moglibyśmy skorzystać ze wzoru na logarytm potęgi) $\log_3 27 = x \Leftrightarrow 3^x = 27$. Ponieważ $27 = 3^3$, więc $\log_3 27 = x \Leftrightarrow 3^x = 3^3$.
Korzystając z różnowartościowości funkcji wykładniczej otrzymujemy, że $x = 3$.
A teraz obliczymy $\log_2 8$. Z definicji $\log_2 8 = x \Leftrightarrow 2^x = 8$. Ponieważ $8 = 2^3$, więc $\log_2 8 = x \Leftrightarrow 2^x = 2^3$. Zatem $x = 3$. Stąd $\log_3 27 - \log_2 8 = 3 - 3 = 0$.

Zaznaczamy odpowiedź **A**.

III. WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA LICZBY RZECZYWISTEJ

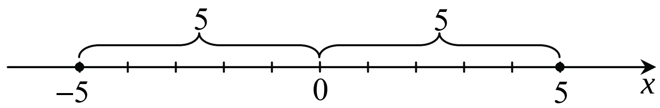
Zadania dotyczące wartości bezwzględnej znajdziemy w Informatorze, oraz w każdym z dotychczas opublikowanych przez CKE arkuszy począwszy od matury pilotażowej z roku 2009, a skończywszy na maturze próbnej z listopada roku 2010. Można zaryzykować twierdzenie, że wartość bezwzględna to jeden z „pewniaków" egzaminu maturalnego na poziomie podstawowym. Jednocześnie zakres wymagań egzaminacyjnych dla poziomu podstawowego z tego tematu jest stosunkowo niewielki – ogranicza się do definicji wartości bezwzględnej, własności i interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej. W tym rozdziale postaramy się przybliżyć te zagadnienia.

Zadanie 1.

Zaznacz na osi liczbowej liczby, których odległość od 0 jest równa 5.

Rozwiązanie

Są dwie takie liczby; na lewo od 0 jest to liczba -5, a na prawo liczba 5.

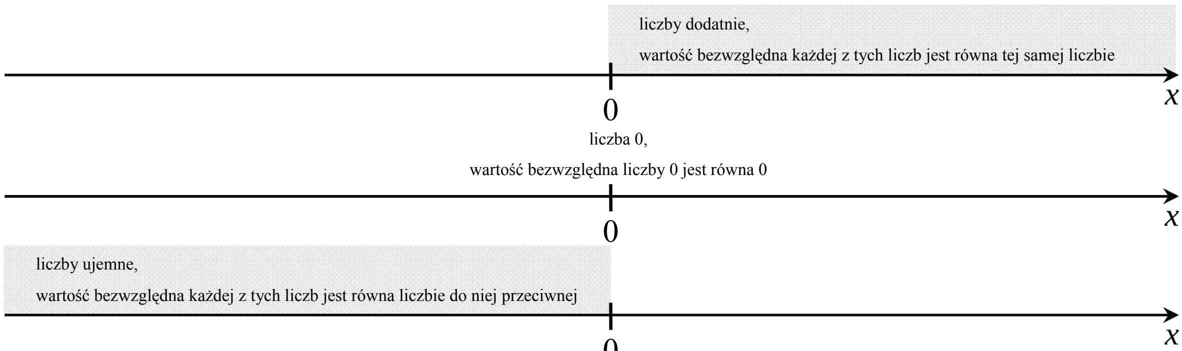


Odległość danej liczby od liczby 0 nazwiemy wartością bezwzględną liczby. Wartość bezwzględną liczby *a* oznaczamy symbolem $|a|$. Zatem zapis $|5|$, czyli wartość bezwzględna liczby 5, oznacza geometrycznie odległość na osi liczbowej między liczbą 5 a liczbą 0. Podobnie zapis $|-5|$ oznacza wartość bezwzględną liczby -5, jest to odległość między liczbą -5 a liczbą 0. Obie te odległości są jednakowe i równe 5, więc

$$|5| = 5 \text{ oraz } |-5| = 5 .$$

Zapamiętajmy. Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej oznacza geometrycznie jej odległość od liczby 0. **Zapis $|a|$ oznacza geometrycznie odległość na osi liczbowej między liczbą *a* oraz liczbą** 0.

Przejdźmy teraz do znaczenia algebraicznego wartości bezwzględnej. Liczby 5 i -5 to liczby przeciwne. Równość $|5| = 5$ oznacza, że wartość bezwzględna z liczby dodatniej 5 jest równa tej samej liczbie 5, natomiast równość $|-5| = 5$ oznacza, że wartość bezwzględna z liczby ujemnej -5 jest liczbą do niej przeciwną, czyli jest równa 5. Tak jest dla wszystkich liczb rzeczywistych różnych od 0. Odległość liczby 0 od 0 jest równa 0, co możemy zapisać $|0| = 0$. Wszystkie te trzy możliwości zilustrujemy na rysunku:



Symbolicznie możemy to zapisać np. tak:

$$|a| = a \text{ dla } a > 0,$$

$$|a| = 0 \text{ dla } a = 0,$$

$$|a| = -a \text{ dla } a < 0.$$

Zadanie 2.

Oblicz:

a) $|-12|$, b) $|\sqrt{2}|$, c) $|-\sqrt{3}|$, d) $\left|\frac{2}{\pi}\right|$, e) , $|-1-\sqrt{2}|$ f) , $|-1+\sqrt{2}|$

Rozwiązanie

Gdy znak liczby, której wartość bezwzględną obliczamy jest oczywisty, to wynik uzyskujemy natychmiast:

a) $|-12| = 12$, bo liczba -12 jest ujemna (leży na osi liczbowej po lewej stronie 0), więc wartość bezwzględna tej liczby jest liczbą do niej przeciwną, czyli jest równa 12,

b) $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, bo liczba $\sqrt{2}$ jest dodatnia (leży na osi liczbowej po prawej stronie 0), więc wartość bezwzględna tej liczby jest tą samą liczbą, czyli jest równa $\sqrt{2}$,

c) $|-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$, bo $-\sqrt{3} < 0$,

d) $\left|\frac{2}{\pi}\right| = \frac{2}{\pi}$, bo $\frac{2}{\pi} > 0$, choć ustalenie znaku liczby $\frac{2}{\pi}$ wymaga odrobinę więcej zastanowienia niż poprzednio.

e) Liczba pod znakiem wartości bezwzględnej to $-1-\sqrt{2}$. Jest to liczba ujemna, więc $|-1-\sqrt{2}| = -(-1-\sqrt{2}) = 1+\sqrt{2}$.

Gdy natomiast znaku liczby, której wartość bezwzględną chcemy obliczyć, nie „widać” od razu, wtedy znak ten musimy ustalić.

j) Znak liczby $-1+\sqrt{2}$ nie jest już taki oczywisty, jak poprzednio. Oszacujmy tę liczbę. Liczba $\sqrt{2}$ jest większa od 1 (jej przybliżenie możemy odczytać z kalkulatora, choć nie jest ono konieczne), więc liczba $-1+\sqrt{2}$ jest dodatnia. Jeśli tak, to
$|-1+\sqrt{2}| = -1+\sqrt{2} = \sqrt{2}-1$.

Jako ćwiczenie proponujemy rozwiązanie zadania 3.

Zadanie 3. (Egzamin próbny – listopad 2010, s. 2, zadanie 1)

Liczba $|5-7|-|-3+4|$ jest równa

A. -3 **B.** -5 **C.** 1 **D.** 3

Przejdźmy teraz do przykładów wyrażeń z wartością bezwzględną, w których pod znakiem wartości bezwzględnej występują wyrażenia zawierające zmienną.

Zadanie 4.

Uprość wyrażenie $|x|-|x+1|$ dla $x>0$.

Rozwiązanie

W wyrażeniu $|x|-|x+1|$ występuje dwa razy wartość bezwzględna. Raz jest to wartość bezwzględna liczby *x*, a drugi raz liczby o 1 większej od *x*. O liczbie *x* wiemy, że jest dodatnia. W takim razie liczba $x+1$ też jest dodatnia. Zatem za każdym razem obliczamy wartość bezwzględną liczby dodatniej, Mamy więc

$$|x|=x \text{ oraz } |x+1|=x+1.$$

Wyrażenie natomiast możemy zapisać w postaci

$$|x|-|x+1|=x-(x+1)=x-x-1=-1.$$

Odpowiedź. $|x|-|x+1|=-1$ dla $x>0$.

Zadanie 5.

Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie $x|x-5|+x|1+x|$ wiedząc, że $-1<x<5$.

Rozwiązanie

Ustalamy znaki liczb $x-5$ oraz $1+x$, gdyż wyznaczamy wartości bezwzględne tych liczb. Warunek $-1<x<5$, oznacza, że bierzemy pod uwagę tylko liczby mniejsze od 5 i jednocześnie większe od -1. Do ustalenia znaku liczby $x-5$ wystarczy nam tylko informacja, że liczba *x* jest mniejsza od 5, bo wtedy od razu widzimy, że $x-5<0$ (gdy od liczby mniejszej niż 5 odejmiemy 5, to otrzymamy liczbę ujemną. Możemy to również otrzymać z nierówności $x<5$, odejmując od obu jej stron 5, wtedy mamy $x-5<5-5$, czyli $x-5<0$). Do ustalenia znaku liczby $1+x$ wystarczy z kolei informacja, że liczba *x* jest większa od -1, bo wtedy $1+x>0$ (wystarczy do obu stron nierówności $x>-1$ dodać 1, by otrzymać $1+x>0$). W efekcie dla $-1<x<5$ otrzymujemy

$$|x-5|=-(x-5)=-x+5 \text{ oraz } |1+x|=1+x,$$

a całe wyrażenia ma postać

$$x|x-5|+x|1+x|=x(-x+5)+x(1+x)=-x^2+5x+x+x^2=6x.$$

Odpowiedź. Gdy $-1<x<5$, to $x|x-5|+x|1+x|=6x$.

Jako ćwiczenie proponujemy rozwiązanie zadania 6.

Zadanie 6.

Jeśli $-2 \le x < 3$, to wyrażenie $2|x+2|-3|x-3|$ jest równe

A. $-5x+5$ **B.** $-x+13$ **C.** $x-13$ **D.** $5x-5$

Zadanie 7.

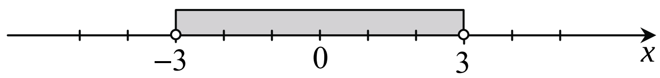
Zaznacz na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb rzeczywistych *x* takich, że $|x| < 3$.

Rozwiązanie

Przypomnijmy, że zapis $|x|$ oznacza geometrycznie odległość liczby *x* od 0 na osi liczbowej.

Możemy więc nasze zadanie sformułować następująco:

Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby rzeczywiste, które są oddalone od liczby 0 o mniej niż 3. Biorąc pod uwagę liczby ujemne zauważamy, że wśród nich „dobre" są te, które leżą na prawo od liczby – 3. Z kolei spośród liczb dodatnich „dobre" są liczby mniejsze od 3.
W rezultacie poszukiwane przez nas liczby są między -3, a 3. Zbiór wszystkich tych liczb to przedział obustronnie otwarty $(-3,\ 3)$. Na osi liczbowej możemy go przedstawić następująco:



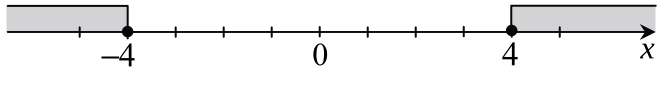
Zadanie 8.

Zaznacz na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb rzeczywistych *x* takich, że $|x| \ge 4$.

Rozwiązanie

Wykorzystując sens geometryczny zapisu $|x|$ możemy nasze zadanie, podobnie jak poprzednie, sformułować następująco:

Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby rzeczywiste, które są oddalone od liczby 0 o 4 lub więcej. Biorąc pod uwagę liczby ujemne zauważamy, że wśród nich „dobre" są te, które leżą na lewo od liczby – 4. Liczba – 4 też jest „dobra", bo leży w odległości dokładnie równej 4 od 0. Wśród liczb dodatnich „dobre" są 4, oraz wszystkie leżące na prawo od 4. Zaznaczmy zbiór tych liczb na osi liczbowej



Zbiór ten to suma przedziałów $\left(-\infty,-4\right\rangle \cup \left\langle 4,+\infty\right)$.

Dotąd rozpatrywaliśmy odległość wskazanej na osi liczby od liczby zero. Odległość liczby *x* od liczby 0 zapisaliśmy za pomocą wartości bezwzględnej, pisząc $|x|$.

Teraz **wykorzystamy wartość bezwzględną do zapisania odległości między dwiema dowolnymi liczbami**.

Odległość między liczbą 2 a liczbą 7 jest równa 5. Obliczymy tę odległość odejmując od liczby 7 liczbę 2. Mogłoby się więc wydawać, że trzeba od drugiej z podanych liczb odjąć pierwszą, czyli $7-2$. Ale odległość między liczbą 7 a liczbą 2 jest również równa 5. Gdybyśmy od drugiej z podanych liczb odjęli pierwszą, czyli od 2 odjęlibyśmy 7, to dostalibyśmy $2-7=-5$, a nie 5. Ale liczby 5 i -5 to liczby, które mają tę samą wartość bezwzględną równą 5. Jeżeli chcemy obliczyć odległość między dwiema liczbami wystarczy obliczyć wartość bezwzględną z różnicy tych liczb.

Zapis $|x-y|$ oznacza geometrycznie odległość na osi liczbowej między liczbami *x* i *y*. Jest to oczywiście też odległość między *y* i *x*. Gdyby jedną z tych liczb było 0, np. $y=0$, to zapis wyglądałby $|x-0|$, czyli $|x|$, co jak wiemy oznacza odległość między liczbą *x* i 0.

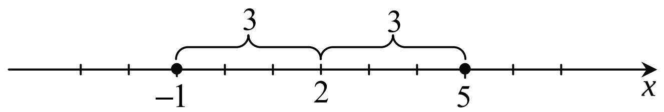
Zadanie 9.

Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby *x*, które spełniają równanie $|x-2|=3$.

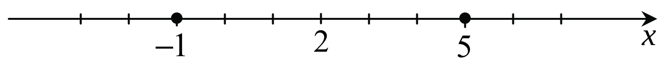
Rozwiązanie

Wykorzystamy podaną wcześniej interpretację geometryczną zapisu $|x-2|$. Oznacza on odległość liczby *x* od liczby 2. Zadanie nasze możemy więc sformułować następująco: Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby *x*, które są oddalone od liczby 2 o 3.

Narysujmy oś liczbową i zaznaczmy na niej liczbę 2. Oddalmy się od liczby 2 o 3 w lewo. Trafimy na liczbę -1. Oddalając się natomiast od liczby 2 o 3 w prawo trafimy na liczbę 5.



Zaznaczamy na osi obie te liczby

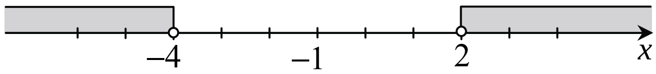


Zadanie 10.

Zaznacz na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb *x*, które spełniają nierówność $|x+1|>3$.

Rozwiązanie

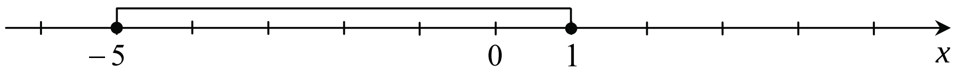
Rozpocznijmy od interpretacji geometrycznej zapisu $|x+1|$. Zwróćmy uwagę, że liczba „pod znakiem wartości bezwzględnej” to suma $x+1$. Łatwo jednak możemy ją zapisać w postaci różnicy $x-(-1)$. Wtedy $|x-(-1)|$ oznacza odległość na osi liczbowej między liczbą *x* a liczbą -1, natomiast zadanie możemy wtedy „przeczytać” tak: Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby *x*, które są oddalone od liczby -1 o więcej niż 3. Na lewo od liczby -1 oddalona o 3 jest liczba -4, a wszystkie liczby leżące na lewo od -4 są oddalone od -1 o więcej niż 3. Każda z nich jest więc „dobra”. Podobnie rozumujemy z liczbami leżącymi na prawo od -1. Dokładnie o 3 jest oddalona od -1 liczba 2 a te, które leżą na prawo od 2, są oddalone od -1 o więcej niż 3. Zaznaczamy zbiór tych liczb na osi liczbowej.

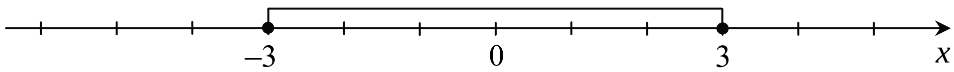


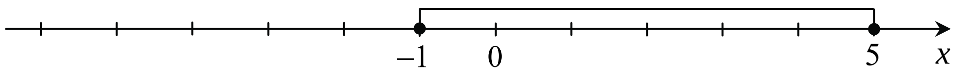
Zaznaczając zbiór szukanych liczb pamiętajmy o tym, że liczby -4 i 2 nie należą do tego zbioru. Dlatego rysujemy „kółeczka niezamalowane”. Zbiór ten to suma przedziałów $(-\infty,-4)\cup(2,+\infty)$.

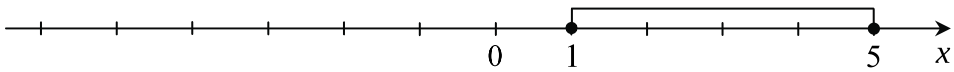
Zadanie 11. (Informator maturalny, s. 77, zadanie 12)

Który z zaznaczonych przedziałów jest zbiorem rozwiązań nierówności $|2-x|\le 3$?

A.


B.


C.


D.


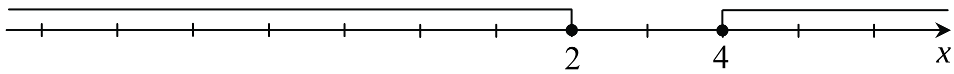
Rozwiązanie

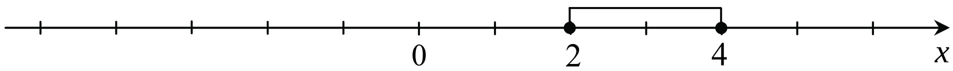
Lewa strona tej nierówności to $|2-x|$. Geometrycznie oznacza to **odległość liczby** 2 **od liczby** *x***.** Ale ta odległość **to również odległość liczby** *x* **od liczby** 2. Interesuje nas więc zbiór wszystkich tych liczb *x*, które są oddalone od liczby 2 o najwyżej 3. Na lewo od liczby 2 oddalona o 3 jest liczba -1, a na prawo od 2 oddalona o 3 jest liczba 5. Liczby leżące w odległości mniejszej niż 3 od liczby 2, to liczby między -1 a 5. Zatem poprawną odpowiedzią jest **C**.

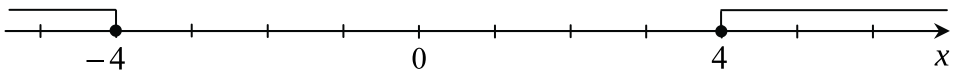
Jako ćwiczenie proponujemy rozwiązanie zadania 12.

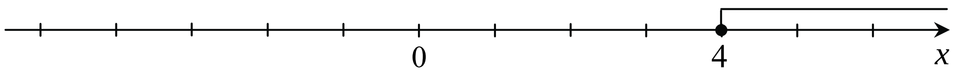
Zadanie 12 (Informator maturalny, s. 54, zadanie 2)

Zbiór rozwiązań nierówności $|x-3|\ge 1$ jest przedstawiony na rysunku

A.


B.


C.


D.


IV. FUNKCJA LINIOWA

Zadania dotyczące funkcji liniowej bez wahania można nazwać „pewniakiem” egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym. Przyjrzyjmy się zadaniom zamkniętym i zadaniom otwartym, które wystąpiły w arkuszach dla poziomu podstawowego opublikowanych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną począwszy od Informatora z matematyki, a skończywszy na próbnym egzaminie maturalnym z 3 listopada 2010 roku.

Zadanie 1. (Informator maturalny, s. 76, zadanie 9)

Liczba 1 jest miejscem zerowym funkcji liniowej $f(x)=(2-m)x+1$. Wynika stąd, że

A. $m=0$ **B.** $m=1$ **C.** $m=2$ **D.** $m=3$

Rozwiązanie

Jest to zadanie zamknięte, a więc musimy po prostu wskazać poprawną odpowiedź. Z informatora maturalnego możemy się dowiedzieć, że wśród czterech podanych odpowiedzi tylko jedna jest dobra, i że na pewno taka odpowiedź jest (*Informator*, strona 11). Możemy więc albo wyeliminować niepoprawne odpowiedzi, albo zadanie możemy potraktować tak, jakby to było zadanie otwarte, w którym nie mamy podanych możliwych odpowiedzi, tylko sami tę odpowiedź musimy wytworzyć. **Jakąkolwiek z tych dróg nie pójdziemy, nie uda nam się rozwiązać tego zadania, jeśli nie wiemy, co to jest miejsce zerowe funkcji**.

Możemy posłużyć się definicją, z której dowiemy się, że jest to każdy argument funkcji, dla którego funkcja przyjmuje wartość 0, czyli dla którego prawdziwa jest równość $f(x)=0$.

Cóż jednak ta równość oznacza? Oznacza to, że jeśli we wzorze funkcji wstawimy w miejsce *x* liczbę, która jest miejscem zerowym funkcji, to wówczas *y*, czyli $f(x)$, jest równe 0.

W naszym przypadku funkcja ma wzór $f(x)=(2-m)x+1$, więc skoro miejscem zerowym jest 1, to możemy zapisać równość

$$0=(2-m)\cdot 1+1$$

Teraz pozostaje już tylko z tej równości wyznaczyć *m*.

$$0=2-m+1,$$

$$m=3.$$

Poprawna odpowiedź w tym zadaniu to **D**.

Jako ćwiczenie proponujemy rozwiązanie bardzo podobnego zadania:

Zadanie 2. (Informator maturalny, s. 40, zadanie 17)

Liczba $x=-7$ jest miejscem zerowym funkcji liniowej $f(x)=(3-a)x+7$ dla

A. $a=-7$ **B.** $a=2$ **C.** $a=3$ **D.** $a=-1$

Często w zadaniu mamy podane, że **punkt leży na prostej, prosta przechodzi przez punkt, bądź punkt należy do prostej**. Taka sytuacja jest np. w poniższym zadaniu.

Zadanie 3. (Egzamin próbny – listopad 2009, s. 8, zadanie 22)

Prosta o równaniu $y=-4x+(2m-7)$ przechodzi przez punkt $A=(2,-1)$. Wtedy

A. $m=7$ **B.** $m=2\frac{1}{2}$ **C.** $m=-\frac{1}{2}$ **D.** $m=-17$

Rozwiązanie

Jak wykorzystać informację, że prosta o podanym równaniu przechodzi przez punkt $A=(2,-1)$? Wystarczy wiedzieć, że pierwsza współrzędna tego punktu jest argumentem funkcji, a druga wartością przyporządkowaną temu argumentowi. Jeśli więc podstawimy w równaniu prostej (albo we wzorze jakiejkolwiek funkcji) za *x* pierwszą współrzędną punktu *A* i za *y* drugą współrzędną tego punktu, to otrzymamy równość prawdziwą, czyli

$$-1=-4\cdot 2+(2m-7).$$

Teraz pozostaje już tylko obliczyć wartość *m*

$$-1=-8+2m-7,$$

$$-1=-15+2m,$$

dodajemy do obu stron równania liczbę 15 i dostajemy

$$-1+15=2m,$$

$$14=2m,$$

więc po podzieleniu obu stron tego równania przez 2 otrzymujemy

$$7=m.$$

Wybieramy poprawną odpowiedź: **A**.

Zadanie 4. (Egzamin maturalny – maj 2010, s. 4, zadanie 9)

Prosta o równaniu $y=-2x+(3m+3)$ przecina w układzie współrzędnych oś *Oy* w punkcie $(0,2)$. Wtedy

A. $m=-\frac{2}{3}$ **B.** $m=-\frac{1}{3}$ **C.** $m=\frac{1}{3}$ **D.** $m=\frac{5}{3}$

Rozwiązanie

W tym zadaniu wystarczy zinterpretować wyraz wolny w równaniu prostej, gdyż mamy podany punkt jej przecięcia z osią *Oy*. Zatem zapisujemy $3m+3=2$, skąd $m=-\frac{1}{3}$.

Zaznaczamy poprawną odpowiedź **B.**

Niekiedy **wzór funkcji podany jest za pomocą „klamerki”**, jak np. w zadaniu:

Zadanie 5. (Informator maturalny, s. 84 zadanie 56)

Oblicz miejsca zerowe funkcji $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{dla } x\le 0\\ x+2 & \text{dla } x>0\end{cases}$.

Rozwiązanie

Musimy wyznaczyć wszystkie argumenty *x*, dla których wartość funkcji, czyli $f(x)$, jest równa 0. Wykorzystując wzór tej funkcji możemy zapisać, że

$$2x+1=0 \text{ dla } x \le 0 \text{, lub też } x+2=0 \text{ dla } x>0 .$$

W pierwszym przypadku dostajemy $x=-\frac{1}{2}$ i ta liczba jest miejscem zerowym, bo $-\frac{1}{2} \le 0$. W drugim mamy z kolei $x=-2$, ale ta liczba nie jest większa od 0, więc nie jest to miejsce zerowe funkcji. W rezultacie funkcja *f* ma jedno miejsce zerowe, którym jest liczba $x=-\frac{1}{2}$.

Jako ćwiczenie proponujemy rozwiązanie zadania 6.

Zadanie 6. (Informator maturalny, s. 54, zadanie 6)

Funkcja *f* jest określona wzorem $f(x)=\begin{cases} x-4 & \text{dla} \quad x \le 3 \\ -x+2 & \text{dla} \quad x>3 \end{cases}$.

Ile miejsc zerowych ma ta funkcja?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Ważnym zagadnieniem, jakie koniecznie należy poruszyć przy omawianiu funkcji liniowej jest **wzajemne położenie wykresów dwóch funkcji liniowych**, **a więc dwóch prostych**. Możemy spotkać się z pytaniem o równoległość prostych, jak to ma miejsce w zadaniu:

Zadanie 7. (Informator maturalny, s. 78, zadanie 22)

Wskaż równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $y=2x-7$.

A. $y=-2x+7$ **B.** $y=-\frac{1}{2}x+5$ **C.** $y=\frac{1}{2}x+2$ **D.** $y=2x-1$

Rozwiązanie

Przypomnijmy, że dwie proste o równaniach kierunkowych $y=a_1x+b_1$ oraz $y=a_2x+b_2$ są równoległe wtedy, gdy ich współczynniki kierunkowe są równe, czyli gdy $a_1=a_2$.

Współczynnik kierunkowy prostej podanej w zadaniu jest równy 2. Taki sam współczynnik ma jedynie prosta, której równanie jest w odpowiedzi **D**. Jest to więc poprawna odpowiedź.

Tego typu zadanie stosunkowo często pojawiało się na egzaminach lub w materiałach egzaminacyjnych opublikowanych przez CKE. Proponujemy jako ćwiczenie rozwiązanie zadań 8 i 9.

Zadanie 8. (Informator maturalny, s. 40, zadanie 13)

Prosta *l* ma równanie $y=2x-11$. Wskaż równanie prostej równoległej do prostej *l*.

A. $y=2x$ **B.** $y=-2x$ **C.** $y=-\frac{1}{2}x$ **D.** $y=\frac{1}{2}x$

Zadanie 9. (Egzamin maturalny – maj 2010, s. 8, zadanie 20)

Współczynnik kierunkowy prostej równoległej do prostej o równaniu $y=-3x+5$ jest równy:

A. $-\frac{1}{3}$ **B.** -3 **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 3

Zadanie 10. (Informator maturalny, s. 84, zadanie 61)

Napisz równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $2x-y-11=0$ i przechodzącej przez punkt $P=(1,2)$.

Rozwiązanie

Równanie $2x-y-11=0$ zapisujemy w postaci kierunkowej: $y=2x-11$

(wystarczy do obu stron równania $2x-y-11=0$ dodać *y*, a następnie zamienić równanie stronami, żeby taką postać uzyskać. Mówimy też często, że przenosimy *y* na prawą stronę równania).

Prosta równoległa ma taki sam współczynnik kierunkowy, czyli 2, więc ma równanie postaci $y=2x+b$. Pozostaje tylko wyznaczyć *b* w tym równaniu. Ponieważ szukana prosta przechodzi przez punkt $P=(1,2)$, więc $2=2\cdot 1+b$. Stąd $b=0$, co oznacza, że równanie szukanej prostej ma postać $y=2x$.

Równie ważnym, i równie często pojawiającym się zagadnieniem w zadaniach egzaminacyjnych z matematyki jest prostopadłość prostych. Przypomnijmy więc, że dwie proste o równaniach kierunkowych $y=a_1x+b_1$ oraz $y=a_2x+b_2$ są prostopadle wtedy, gdy iloczyn ich współczynników kierunkowych jest równy -1, co możemy zapisać krótko $a_1\cdot a_2=-1$. Praktycznie lepiej zapamiętać, że współczynnik kierunkowy jednej z prostych prostopadłych jest liczbą przeciwną do odwrotności współczynnika kierunkowego drugiej z tych prostych.

Zadanie 11. (Informator maturalny, s. 78, zadanie 23)

Które z równań opisuje prostą prostopadłą do prostej o równaniu $y=4x+5$?

A. $y=-4x+3$ **B.** $y=-\frac{1}{4}x+3$ **C.** $y=\frac{1}{4}x+3$ **D.** $y=4x+3$

Rozwiązanie

Współczynnik kierunkowy prostej podanej w treści zadania jest równy 4. Odwrotność tej liczby to $\frac{1}{4}$, a liczba przeciwna do $\frac{1}{4}$ to $-\frac{1}{4}$. Spośród podanych równań prostych tylko w odpowiedzi **B** jest taki współczynnik kierunkowy, jest to więc poprawna odpowiedź.

Tak samo postąpimy w zadaniu 12, które zostawiamy jako ćwiczenie.

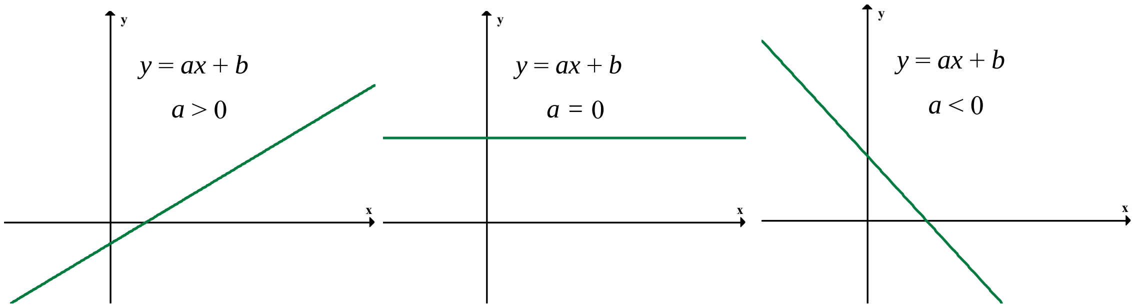
Zadanie 12. (Egzamin próbny – listopad 2009, s. 8, zadanie 21)

Wykres funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = 3x + 2$ jest prostą prostopadłą do prostej o równaniu:

A. $y = -\frac{1}{3}x - 1$ **B.** $y = \frac{1}{3}x + 1$ **C.** $y = 3x + 1$ **D.** $y = 3x - 1$

Ostatnim zagadnieniem, jakie omówimy przy funkcji liniowej będzie monotoniczność tej funkcji. Mamy tu trzy możliwości.

Albo **funkcja liniowa jest rosnąca, albo malejąca, albo stała**. Zależy to od współczynnika kierunkowego prostej będącej wykresem tej funkcji. Te sytuacje przedstawiają kolejne rysunki.



Zadanie 13. (Egzamin próbny – listopad 2010, s. 6, zadanie 12)

Wskaż *m*, dla którego funkcja liniowa określona wzorem $f(x) = (m-1)x + 3$ jest stała.

A. $m = 1$ **B.** $m = 2$ **C.** $m = 3$ **D.** $m = -1$

Rozwiązanie

Funkcja liniowa *f* jest stała tylko wtedy, gdy współczynnik kierunkowy prostej, która jest wykresem tej funkcji, jest równy 0, a więc gdy $m - 1 = 0$. Stąd $m = 1$. Zatem poprawna odpowiedź to **A**.

Rozwiążmy kolejne zadanie.

Zadanie 14.

Wyznacz wszystkie wartości *m*, dla których funkcja liniowa $f(x) = (2m-10)x + (m-6)$ jest rosnąca.

Rozwiązanie

Funkcja liniowa *f* jest rosnąca tylko wtedy, gdy współczynnik kierunkowy jej wykresu jest dodatni, a więc gdy $2m - 10 > 0$. Stąd $m > 5$.

V. FUNKCJA KWADRATOWA

Zadania przedstawione w tym rozdziale dotyczą w zasadzie funkcji kwadratowej. Należy pamiętać, że funkcję zmiennej x, postaci $y = ax^2 + bx + c$, nazywamy **funkcją kwadratową** (**także trójmianem kwadratowym), gdy** a **jest dowolną, ale różną od zera liczbą rzeczywistą.**

Zadanie 1.

Dany jest trójmian kwadratowy $y = -3x^2 + 4x - 1$. Znajdź pierwiastki tego trójmianu i przedstaw go w postaci iloczynowej.

Rozwiązanie

Zacznijmy od uwagi, że **rozwiązać równanie** $-3x^2 + 4x - 1 = 0$**, znaczy to samo, co znaleźć pierwiastki trójmianu kwadratowego** $y = -3x^2 + 4x - 1$. Obliczamy Δ tego trójmianu: $\Delta = 4^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1) = 16 - 12 = 4$. Ponieważ $\Delta > 0$,więc trójmian ma dwa pierwiastki (miejsca zerowe), które obliczamy korzystając ze wzorów na pierwiastki trójmianu (podane są w *Zestawie wzorów* na stronie 4):

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-\sqrt{4}}{2\cdot(-3)} = \frac{-4-2}{-6} = \frac{-6}{-6} = 1,\quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+\sqrt{4}}{2\cdot(-3)} = \frac{-4+2}{-6} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}.$$

Znając pierwiastki możemy ponownie skorzystać z podanego w *Zestawie* wzoru $y = a(x-x_1)(x-x_2)$ i zapisać postać iloczynową jako $y = (-3)\cdot(x-1)\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)$.

Zauważmy, że wymnażając czynnik $\left(x-\frac{1}{3}\right)$ przez liczbę (-3) otrzymujemy $y = (x-1)\cdot(1-3x)$ - również ta postać stanowi rozkład trójmianu kwadratowego na czynniki liniowe

Popatrzmy teraz na niektóre szczególne przypadki trójmianów kwadratowych i odpowiadające im równania kwadratowe.

Zadanie 2.

Rozwiąż równanie $x^2 - 6x = 0$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że łatwo możemy znaleźć postać iloczynową lewej strony równania; $x(x-6) = 0$ i korzystając z niej zapisać dwie równości $x = 0$ lub $x - 6 = 0$. Z drugiej otrzymujemy $x = 6$. Zatem równanie $x^2 - 6x = 0$ ma dwa rozwiązania: $x = 0$ oraz $x = 6$.

Uwaga. W żadnym razie **nie jest błędem** obliczanie w takim przypadku Δ i korzystanie ze wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego.

Zadanie 3.

Rozwiąż równanie $x^2 - 25 = 0$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że korzystając ze wzoru skróconego mnożenia $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ możemy znaleźć postać iloczynową lewej strony równania i w konsekwencji zapisać równanie w postaci

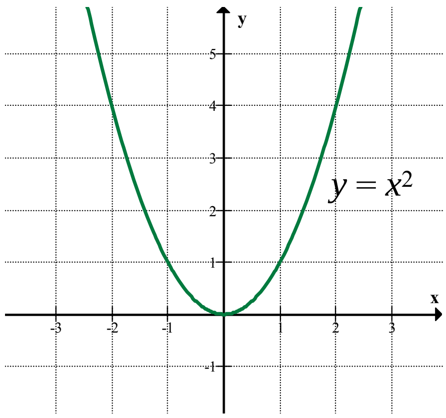
$$(x-5)(x+5)=0.$$

Korzystając z postaci iloczynowej możemy podać pierwiastki: $x=-5$ lub $x=5$.

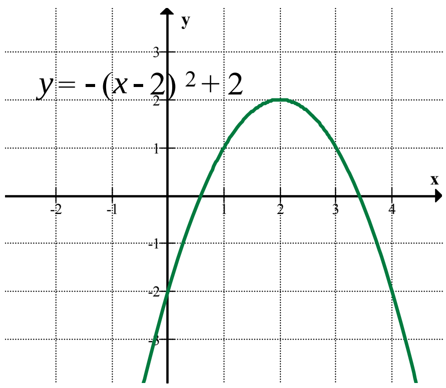
Podobnie jak w poprzednim przykładzie **nie jest błędem** obliczanie w takim przypadku Δ i korzystanie ze wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego.

Przejdźmy teraz do zagadnień związanych z wykresem funkcji kwadratowej. Zapamiętajmy, że **wykresem funkcji kwadratowej jest parabola**.

Przykładem niech będzie przedstawiony poniżej wykres funkcji $y = x^2$.



O takiej paraboli przyjęło się mówić, że ma „ramiona skierowane do góry”, w odróżnieniu od paraboli narysowanej poniżej, której „ramiona są skierowane do dołu”.



Uwaga. **Ramiona paraboli są „skierowane do góry” wtedy, gdy współczynnik przy x^2 jest liczbą dodatnią; ramiona paraboli są „skierowane do dołu”, gdy współczynnik przy x^2 jest liczbą ujemną.**

Maturzyści z wcześniejszego rocznika rozwiązywali poniższe zadanie.

Zadanie 4. (Egzamin maturalny – maj 2010, s. 4, zadanie 8)

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = -3x^2 + 3$ jest parabola o wierzchołku w punkcie

A. $(3, 0)$ **B.** $(0, 3)$ **C.** $(-3, 0)$ **D.** $(0, -3)$

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że wzór funkcji można zapisać w postaci $f(x) = -3x^2 + 0 \cdot x + 3$. Teraz wyraźnie widać, że współczynniki tego trójmianu kwadratowego są równe $a = -3$, $b = 0$, $c = 3$.

Korzystając ze wzorów na współrzędne wierzchołka paraboli $W = (x_W, y_W) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ (podane są w *Zestawie wzorów* na stronie 4) obliczamy $x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \cdot (-3)} = 0$. Możemy oczywiście konsekwentnie stosować podany wyżej wzór na współrzędne wierzchołka i w tym celu obliczyć najpierw $\Delta = 0^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 3 = 36$, a następnie $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{36}{4 \cdot (-3)} = \frac{-36}{-12} = 3$.

Pamiętajmy jednak, że **wierzchołek to też punkt wykresu funkcji, więc $y_w = f(x_w)$.**

W naszym przykładzie $x_w = 0$, a to pozwala łatwo obliczyć drugą współrzędną wierzchołka: $y_w = f(0) = -3 \cdot 0^2 + 3 = 3$. Zaznaczamy **B**.

Zwykle rozwiązanie zadania nie wymaga precyzyjnie narysowanej paraboli, wystarczy jedynie jej szkic, na którym zaznaczamy wybrane punkty charakterystyczne paraboli (miejsca zerowe, wierzchołek, punkt przecięcia z osią *Oy*). **Zawsze jednak należy określić znak współczynnika przy x^2, co pozwala odpowiednio skierować ramiona paraboli „do dołu” lub „do góry”. Kolejny krok jest zazwyczaj zależny od treści zadania.** Najczęściej obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego. Postępujemy tak w szczególności rozwiązując nierówności kwadratowe.

Zacznijmy od dwóch nierówności z arkuszy maturalnych.

Zadanie 5. (Egzamin maturalny – maj 2010, s. 4, zadanie 7)

Do zbioru rozwiązań nierówności $(x-2)(x+3) < 0$ należy liczba

A. 9 **B.** 7 **C.** 4 **D.** 1

Rozwiązanie

Możemy kolejno sprawdzać, która z liczb 9, 7, 4, 1 spełnia podaną nierówność. Wstawiając kolejno w miejsce *x* te liczby otrzymujemy:

$$(9-2)(9+3) = 7 \cdot 12 > 0 \text{ dla } x = 9,$$

$$(7-2)(7+3) = 5 \cdot 10 > 0 \text{ dla } x = 7,$$

$$(4-2)(4+3) = 2 \cdot 7 > 0 \text{ dla } x = 4,$$

$$(1-2)(1+3)=(-1)\cdot 4<0 \text{ dla } x=1.$$

Spośród podanych liczb, tylko liczba 1 spełnia naszą nierówność, czyli należy do zbioru rozwiązań tej nierówności. Wybieramy poprawną odpowiedź **D**.

Zauważmy, że nie było potrzeby obliczania wartości poszczególnych iloczynów (na przykład, że $7\cdot 12=84$). Wystarczyło zauważyć, że mnożąc dwie liczby dodatnie, otrzymujemy liczbę dodatnią.

Zadanie 6. (Egzamin maturalny – maj 2010, s. 10, zadanie 26)

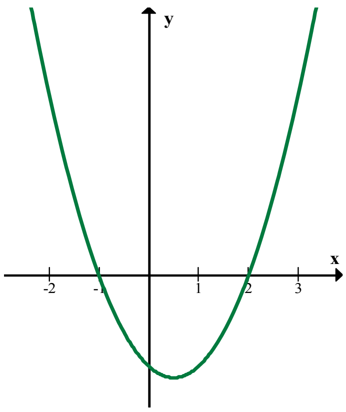
Rozwiąż nierówność $x^2-x-2\le 0$.

Rozwiązanie

Ponieważ $\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=1+8=9$, więc

$$x_1=\frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2}=\frac{1-3}{2}=-1,\quad x_2=\frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2}=\frac{1+3}{2}=2.$$

Zaznaczamy teraz w układzie współrzędnych pierwiastki trójmianu (są odciętymi punktów wspólnych paraboli i osi *Ox*), a następnie przez te punkty szkicujemy parabolę, której ramiona są „skierowane do góry” (ponieważ współczynnik przy x^2 jest równy 1, czyli jest liczbą dodatnią).



Zatem $x\in\langle -1, 2\rangle$.

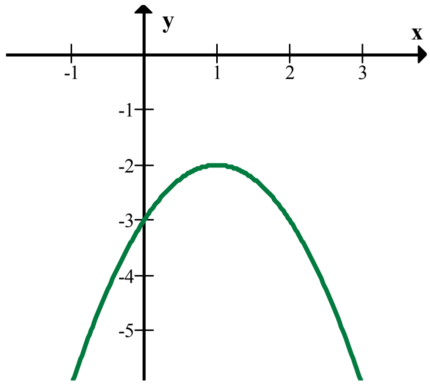
Spróbujmy poradzić sobie z rozwiązaniem dwóch „szczególnych” nierówności:

Zadanie 7.

Rozwiąż nierówność $-x^2+2x-3<0$.

Rozwiązanie

Podobnie jak w poprzednim zadaniu zaczniemy od obliczenia wyróżnika trójmianu, czyli Δ.
$\Delta=2^2-4\cdot(-1)\cdot(-3)=4-12=-8$. Wyróżnik trójmianu $y=-x^2+2x-3$ jest ujemny, więc ten trójmian nie ma pierwiastków. Zatem parabola będąca jego wykresem nie ma punktów wspólnych z osią *Ox* – i ta wiedza nam wystarczy. Szkicujemy parabolę, która nie ma punktów wspólnych z osią *Ox* i ma ramiona „skierowane do dołu”. Leży więc cała pod osią *Ox*.



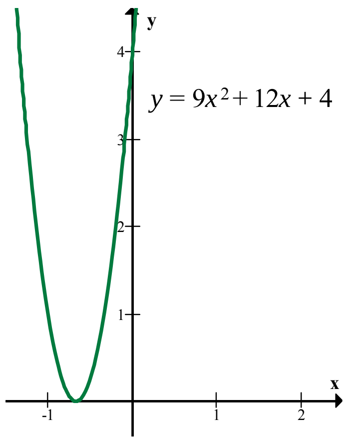
Ponieważ w całości wykres trójmianu leży pod osią *Ox*, więc trójmian ten przyjmuje tylko wartości ujemne, zatem $x \in R$.

Zadanie 8.

Rozwiąż nierówność $9x^2 + 12x + 4 > 0$.

Rozwiązanie

I raz jeszcze powtórzmy schemat z wyróżnikiem: $\Delta = 12^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0$. Wiemy (podane jest to także w *Zestawie wzorów* na stronie 4), że gdy $\Delta = 0$, to równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie, zatem parabola (wykres trójmianu $y = 9x^2 + 12x + 4$) dokładnie w jednym miejscu styka się z osią *Ox*. Obliczamy pierwiastek naszego trójmianu: $x_0 = -\frac{12}{2 \cdot 9} = -\frac{2}{3}$. Współczynnik przy x^2 jest dodatni (równy 9), więc parabola ma ramiona skierowane „do góry". Szkicujemy ją



Zauważmy, że nasz trójmian kwadratowy przyjmuje „prawie zawsze" wartości dodatnie – prawie, ponieważ dla $x = -\frac{2}{3}$ przyjmuje on wartość 0. Tak więc nierówność $9x^2 + 12x + 4 > 0$ jest spełniona dla wszystkich liczb rzeczywistych $x \neq -\frac{2}{3}$.

Możemy to także zapisać w postaci $x \in R \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$ lub $x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

Zadanie 9.

Funkcja kwadratowa $f(x) = 2x^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Oblicz wartości współczynników b i c.

Rozwiązanie

Skorzystamy z postaci iloczynowej funkcji kwadratowej $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$.
Ponieważ współczynnik przy x^2 jest równy 2, a pierwiastkami są liczby $x_1 = -2$, $x_2 = 1$,

więc zapisujemy $f(x) = 2(x+2) \cdot (x-1)$. Mnożąc i porządkując dostajemy

$$f(x) = 2(x^2 - x + 2x - 2),$$
$$f(x) = 2x^2 + 2x - 4.$$

Odpowiedź: $b = 2, c = -4$.

Zadanie 10.

Funkcja kwadratowa $f(x) = -3x^2 + bx + c$ przyjmuje największą swoją wartość równą 2 dla argumentu równego 4. Oblicz wartości współczynników *b* i *c*.

Rozwiązanie

Skorzystamy z postaci kanonicznej funkcji kwadratowej $f(x) = a \cdot (x - p)^2 + q$, gdzie liczby p, q są współrzędnymi wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji *f*. Gdy $a < 0$ (ramiona paraboli będącej wykresem funkcji są skierowane „do dołu"), to liczba q jest największą wartością funkcji. Funkcja przyjmuje tę wartość dla argumentu równego *p*.
W naszym przypadku $a = -3 < 0$, więc $q = 2$ jest największą wartością funkcji dla $p = 4$.
Możemy więc zapisać

$$f(x) = -3(x-4)^2 + 2,$$

co po zastosowaniu wzoru na kwadrat różnicy, pomnożeniu i redukcji wyrazów podobnych prowadzi nas do postaci

$$f(x) = -3(x^2 - 8x + 16) + 2 = -3x^2 + 24x - 46.$$

Odpowiedź: $b = 24, c = -46$.

Zadanie 11.

Punkty $A = (-3,4)$ i $B = (2,9)$ leżą na wykresie funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + 3x + c$.

Oblicz wartości współczynników *a* i *c*.

Rozwiązanie

Ponieważ punkt *A* leży na wykresie, więc $4 = a \cdot (-3)^2 + 3 \cdot (-3) + c$. Podobnie dla punktu *B* otrzymujemy $9 = a \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + c$. Po uproszeniu obu równości zapisujemy układ równań.

$$\begin{cases} 9a + c = 13 \\ 4a + c = 3 \end{cases},$$

którego rozwiązaniem jest para liczb $a = 2$ i $c = -5$.

Odpowiedź: $a = 2$ i $c = -5$.

VI. WIELOMIANY

Zdający matematykę na poziomie podstawowym ma stosunkowo niewiele umiejętności, jakie powinien opanować z „wielomianów”. O tych umiejętnościach można przeczytać w Informatorze o egzaminie maturalnym od 2010 roku. Wymagania związane z tymi umiejętnościami zostały tam również zilustrowane zadaniami. W tym opracowaniu oprócz zadań z Informatora przyjrzymy się również zadaniom z arkuszy z egzaminów próbnych i egzaminu właściwego, jakie do tej pory miały miejsce. Do działu „wielomiany” zaliczymy również równania stopnia wyższego niż 2 z jedną niewiadomą, choć w Informatorze umiejętności rozwiązywania równań zostały ujęte w oddzielnym dziale „Równania i nierówności”.

Przypomnienie wiadomości dotyczących wielomianów rozpoczniemy od pojęcia wielomianu jednej zmiennej i pojęcia pierwiastka wielomianu.

Wielomianem jednej zmiennej *x* nazywamy funkcję (oznaczamy ją zwykle wielką literą *W*, *P*, *V* itp., albo piszemy również $W(x)$, $P(x)$, $V(x)$ itp.) określoną dla każdej liczby rzeczywistej *x* wzorem

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Liczby $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ nazywamy współczynnikami wielomianu. Współczynnik a_0 nazywamy wyrazem wolnym wielomianu.

Ważnym jest również pojęcie stopnia wielomianu. **Stopniem wielomianu nazywamy najwyższy wykładnik potęgi zmiennej *x*, gdy zmienna *x* występuje we wzorze w potędze co najmniej pierwszej. Przyjmujemy również, że wielomian, który jest funkcja stałą, ale nie równą tożsamościowo zero, ma stopień równy 0. Natomiast stopnia wielomianu, który jest funkcją stałą, tożsamościowo równą 0, nie określa się.**

Na przykład $W(x) = 6x^5 - x^3 - 2x + 7$ to wielomian stopnia piątego, wyraz wolny tego wielomianu jest równy 7, współczynnik stojący przy najwyższej potędze zmiennej *x* jest równy 6.

Z kolei funkcja $P(x) = 6x^5 - x^3 - 2x^{-1} + 7$ nie jest wielomianem, gdyż zmienna *x* wystąpiła we wzorze tej funkcji w potędze o wykładniku -1, a może występować tylko w potęgach o wykładnikach całkowitych dodatnich. Poza tym funkcja o takim wzorze nie jest określona dla każdej liczby rzeczywistej *x*, bo nie jest określona dla $x = 0$.

Funkcja $W(x) = 2x - 7$ to wielomian stopnia pierwszego, częściej mówimy, że jest to funkcja liniowa albo dwumian liniowy, a funkcja $V(x) = -3x^2 + x - 2$ to przykład wielomianu stopnia drugiego, czyli inaczej funkcji kwadratowej lub trójmianu kwadratowego.

Znajomość stopnia wielomianu badana była np. w poniższym zadaniu:

Zadanie 1. (Informator maturalny, s. 78, zadanie 19)

Dane są wielomiany $W(x)=3x^3-2x$, $V(x)=2x^2+3x$. Stopień wielomianu $W(x)\cdot V(x)$ jest równy

A. 6 **B.** 5 **C.** 4 **D.** 3

Rozwiązanie

Wyznaczmy najpierw wielomian $W(x)\cdot V(x)$, o którego stopień pytamy.

$$W(x)\cdot V(x)=\left(3x^3-2x\right)\left(2x^2+3x\right)=$$

mnożymy teraz „każdy przez każdy”

$$=3x^3\cdot 2x^2+3x^3\cdot 3x-2x\cdot 2x^2-2x\cdot 3x=6x^5+9x^4-4x^3-6x^2$$

Otrzymaliśmy wielomian stopnia piątego, co oznacza, że poprawna odpowiedź to **B**.

Rozwiązując to zadanie w ten sposób wykonaliśmy znacznie więcej, niż to było konieczne, bo wyznaczyliśmy iloczyn dwóch wielomianów. Lepiej (krócej) można postąpić inaczej. Zastanówmy się nad tym, czy **możemy ustalić stopień iloczynu dwóch wielomianów, gdy znamy stopnie tych wielomianów**. Oczywiście tak. Stopień iloczynu dwóch niezerowych wielomianów jest równy sumie stopni tych wielomianów, gdyż najwyższa potęga, w jakiej wystąpi zmienna x w iloczynie wielomianów bierze się z pomnożenia najwyższych potęg tej zmiennej w każdym z czynników. W naszym przypadku stopień wielomianu W jest równy 3, stopień wielomianu V jest równy 2, więc stopień iloczynu tych wielomianów jest równy 5.

Kolejnym ważnym pojęciem jest **pojęcie pierwiastka wielomianu**. **Jest to inaczej miejsce zerowe wielomianu**. Warto zwrócić uwagę, że słowo pierwiastek nie jest jednoznaczne. Liczbę $\sqrt{2}$ nazywamy pierwiastkiem z liczby 2 (dokładniej należałoby powiedzieć pierwiastkiem arytmetycznym stopnia drugiego z liczby 2), a z kolei pierwiastkiem wielomianu $W(x)=2x-6$ jest liczba 3, gdyż $W(3)=2\cdot 3-6=0$.

Wykorzystamy pojęcie pierwiastka wielomianu rozwiązując następujące dwa zadania.

Zadanie 2. (Próbny egzamin maturalny – listopad 2010, s. 7, zadanie 11)

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)=x^3+ax^2+6x-4$. Współczynnik a jest równy

A. 2 **B.** -2 **C.** 4 **D.** -4

Rozwiązanie

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)=x^3+ax^2+6x-4$. Oznacza to, że jeśli we wzorze tego wielomianu w miejsce x wstawimy liczbę 2, to wielomian ten będzie miał wartość równą 0. Otrzymujemy zatem równanie

$$2^3 + a \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 4 = 0,$$

$$4a + 16 = 0.$$

Stąd obliczamy $a = -4$. Zatem poprawna odpowiedź to **D**.

Przejdźmy teraz do rozwiązywania równań. Przypomnijmy najpierw, co to znaczy rozwiązać równanie.

Rozwiązać równanie to po prostu znaleźć wszystkie liczby, które to równanie spełniają, czyli mają taką własność, że jeśli taką liczbę wstawimy do równania w każde miejsce, w którym występuje litera oznaczająca niewiadomą, a następnie wykonamy wszystkie działania, to wynik (liczba) uzyskany po lewej i po prawej stronie równania będzie taki sam.

Na przykład równanie

$$5x^3 + x^2 + 2x = (2x^2 - 1)(2x + 3) + 8x - 17$$

to równanie z jedną niewiadomą *x*. Możemy je najpierw przekształcić równoważnie do postaci mnożąc $\left(2x^2 - 1\right)\left(2x + 3\right)$. Otrzymujemy wówczas

$$5x^3 + x^2 + 2x = 4x^3 + 6x^2 - 2x - 3 + 8x - 17.$$

Redukując po prawej stronie wyrazy podobne, czyli licząc $-2x + 8x = 6x$ i $-3 - 17 = -20$, mamy dalej

$$5x^3 + x^2 + 2x = 4x^3 + 6x^2 + 6x - 20$$

Odejmując od obu stron równania $4x^3$, $6x^2$, $6x$ oraz dodając 20 (często mówimy wtedy, że przenosimy składniki na lewą stronę zmieniając znaki) dostajemy

$$x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$$

Otrzymaliśmy równanie, w którym po lewej stronie jest wielomian stopnia trzeciego, uporządkowany malejąco (występują kolejne potęgi *x* począwszy od x^3). Po prawej stronie występuje 0.

Najczęściej będziemy starali się teraz przekształcić wielomian do postaci iloczynu wielomianów niższych stopni.

Pozostaje zatem zapisać wielomian $x^3 - 5x^2 - 4x + 20$ w postaci iloczynu wielomianów, z których każdy jest stopnia niższego niż 3. Z dwóch pierwszych składników wyłączamy przed nawias x^2, czyli zamiast $x^3 - 5x^2$ zapiszemy $x^2\left(x - 5\right)$, oraz z pozostałych dwóch składników wyłączamy przed nawias -4, czyli zamiast $-4x + 20$ zapiszemy $-4\left(x - 5\right)$, to wówczas równanie zapisujemy w postaci

$$x^2\left(x - 5\right) - 4\left(x - 5\right) = 0.$$

Teraz mamy ten sam czynnik $x - 5$, który występuje w iloczynie $x^2\left(x - 5\right)$ oraz w iloczynie $-4\left(x - 5\right)$. Wyłączamy więc ten wspólny czynnik przed nawias

$$(x-5)(x^2-4)=0.$$

Iloczyn dwóch czynników jest równy 0 tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z czynników jest równy 0, więc $x-5=0$ lub $x^2-4=0$.

Stąd wnioskujemy, że $x=5$ lub $x^2-4=0$. Lewą stronę równania $x^2-4=0$ możemy zapisać w postaci iloczynu, więc równanie będzie miało wtedy postać

$$(x-2)(x+2)=0.$$

Znowu mamy iloczyn po lewej stronie, a 0 po prawej, więc wnioskujemy jak poprzednio, że

$$x-2=0 \text{ lub } x+2=0$$

więc

$$x=2 \text{ lub } x=-2$$

W ten sposób znaleźliśmy wszystkie liczby: 5, 2 oraz -2, które spełniają równanie $5x^3+x^2+2x=(2x^2-1)(2x+3)+8x-17$. Rozwiązaliśmy zatem to równanie.

Oczywiście w rozwiązaniu zadania nie będziemy opisywać wszystkich czynności, które będziemy wykonywać, wystarczy, że zapiszemy jedynie efekty tych czynności. Rozwiązanie podobnego zadania mogłoby więc wyglądać następująco:

Zadanie 3. (Informator maturalny, s. 63, zadanie 22)

Rozwiąż równanie $x^3-4x^2-3x+12=0$.

Rozwiązanie

$$x^3-4x^2-3x+12=0,$$

$$x^2(x-4)-3(x-4)=0,$$

$$(x-4)(x^2-3)=0,$$

$$(x-4)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0,$$

$$x-4=0 \text{ lub } x-\sqrt{3}=0 \text{ lub } x+\sqrt{3}=0.$$

$$x=4 \text{ lub } x=\sqrt{3} \text{ lub } x=-\sqrt{3}.$$

Odpowiedź. Równanie ma trzy rozwiązania: $x=4$, $x=\sqrt{3}$, $x=-\sqrt{3}$.

Jako ćwiczenie proponujemy rozwiązanie następujących dwóch zadań.

Zadanie 4. (Egzamin maturalny – maj 2010, s. 10, zadanie 27)

Rozwiąż równanie $x^3-7x^2-4x+28=0$.

Zadanie 5. (Próbny egzamin maturalny – listopad 2010, s. 12, zadanie 27)

Rozwiąż równanie $x^3+2x^2-5x-10=0$.

Ostatnie zagadnienie, jakie tu poruszymy, to **równość wielomianów**. Warto przypomnieć sobie twierdzenie o równości wielomianów. Dwa wielomiany są równe wtedy i tylko wtedy, gdy albo oba są wielomianami zerowymi, albo też, gdy nie są to wielomiany zerowe, mają taki sam stopień i równe współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej. Wyjaśnimy to dokładniej rozwiązując następujące zadanie.

Zadanie 6. (Informator maturalny, s. 84, zadanie 59)

Wielomiany $W(x) = ax(x+b)^2$ i $V(x) = x^3 + 2x^2 + x$ są równe. Oblicz *a* i *b*.

Rozwiązanie

Zapiszmy najpierw wielomian $W(x)$ w postaci uporządkowanej.

$$W(x) = ax(x+b)^2 = ax\left(x^2 + 2bx + b^2\right) = ax^3 + abx^2 + ab^2x\,.$$

Ponieważ z treści zadania wiemy, że wielomiany $W(x)$ i $V(x)$ są równe, więc skoro $V(x)$ jest wielomianem stopnia trzeciego, to i wielomian $W(x)$ też musi być stopnia trzeciego. Stąd wynika jedynie, że $a \neq 0$ (współczynnik przy trzeciej potędze zmiennej x wielomianu $W(x)$ musi być różny od 0). Ponadto między współczynnikami wielomianów muszą zachodzić równości

$$a = 1 \quad \text{i} \quad 2ab = 2 \quad \text{i} \quad ab^2 = 1$$

Gdy $a = 1$, to z drugiej równości otrzymujemy $b = 1$. Trzecia równość jest prawdziwa dla $a = 1$ i $b = 1$. Są to zatem szukane wartości *a* i *b*. **Zwróćmy uwagę, że konieczne jest sprawdzenie, czy wszystkie równości współczynników zachodzą**. Gdybyśmy jedynie wzięli pod uwagę równość współczynników przy x^3 oraz przy x, to dostalibyśmy układ równań

$$a = 1 \quad \text{i} \quad ab^2 = 1$$

Gdy $a = 1$, to z drugiego równania otrzymujemy $b^2 = 1$. Stąd $b = -1$ lub $b = 1$. Mamy zatem dwie pary liczb *a* i *b*. Jedna to $a = 1$ i $b = -1$, a druga $a = 1$ i $b = 1$. Ale tylko druga z tych par jest „dobra”, gdyż dla $a = 1$ i $b = -1$ współczynniki przy x^2 nie są sobie równe.

VII. FUNKCJA WYMIERNA

Zacznijmy od rozwiązania prostych równań wymiernych.

Zadanie 1.

Rozwiąż równanie $\frac{x^2-4}{2-x}=0$.

Rozwiązanie

Zaczniemy od wyznaczenia dziedziny równania, którą jest dziedzina funkcji wymiernej $f(x)=\frac{x^2-4}{2-x}$. Ponieważ mianownik występujący we wzorze po prawej stronie nie może być równy zeru, więc otrzymujemy $2-x\neq 0$, czyli $x\neq 2$. Zatem dla $x=2$ to równanie nie ma sensu liczbowego. Zazwyczaj podając dziedzinę oznaczamy ją literą D, stąd w naszym zadaniu $D=R\setminus\{2\}$.

Możemy teraz przejść do szukania rozwiązań równania. Ponieważ **iloraz dwóch liczb może być równy zero tylko wówczas, gdy licznik jest równy zero**, więc równanie $\frac{x^2-4}{2-x}=0$ jest równoważne równaniu $x^2-4=0$, ale **z uwzględnieniem wyznaczonej wcześniej dziedziny**. Otrzymujemy kolejno

$$x^2-4=0,$$

$$(x-2)(x+2)=0,$$

$$x=2 \quad \text{lub} \quad x=-2.$$

Rozwiązaniami równania $x^2-4=0$ są liczby 2 oraz -2, ale rozwiązaniem równania $\frac{x^2-4}{2-x}=0$ nie może być liczba 2, bo nie należy ona do dziedziny równania. Zatem szukanym rozwiązaniem jest „tylko” $x=-2$.

Potrafimy już rozwiązać zadanie z jednej z wcześniejszych matur.

Zadanie 2. (Egzamin maturalny – sierpień 2010, s.4, zadanie 8)

Równanie $\frac{x^2-4}{(x-4)(x+4)}=0$

A. nie ma rozwiązań.

B. ma dokładnie jedno rozwiązanie.

C. ma dokładnie dwa rozwiązania.

D. ma dokładnie cztery rozwiązania.

Rozwiązanie

Postać iloczynowa w mianowniku pozwala „od razu” zapisać dziedzinę $D=R\setminus\{-4,4\}$.

Z kolei rozwiązaniem równania $x^2-4=0$ są liczby -2 oraz 2. Obie otrzymane liczby tj.

-2 oraz 2 są zatem rozwiązaniami równania $\dfrac{x^2-4}{(x-4)(x+4)}=0$ (z dziedziny wykluczyliśmy $-4,\ 4$). Zaznaczamy odpowiedź **C**.

A teraz rozwiążemy równanie, w którym wyznaczenie dziedziny „pominiemy”, choć w żadnym razie o niej nie zapomnimy.

Zadanie 3.

Rozwiąż równanie $\dfrac{2x^2-x-1}{x^3-5x^2+2x+2}=0$.

Rozwiązanie

Moglibyśmy zacząć od wyznaczenia dziedziny równania. Warunek, który pozwoliłby wyznaczyć tę dziedzinę to $x^3-5x^2+2x+2\neq 0$. Jednak wyznaczenie wszystkich pierwiastków wielomianu $G(x)=x^3-5x^2+2x+2$ nie jest łatwe (jest to raczej zadanie z poziomu rozszerzonego). **Wyznaczmy wszystkie te liczby, które mogą być rozwiązaniami tego równania.** Są to wszystkie pierwiastki licznika. Ich wyznaczenie to rozwiązanie równania $2x^2-x-1=0$.

Ponieważ $\Delta=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-1)=1+8=9$, więc

$$x_1=\frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\frac{1-3}{4}=-\frac{1}{2}\quad x_2=\frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\frac{1+3}{4}=1.$$

Rozwiązaniem równania $2x^2-x-1=0$ są zatem liczby 1 oraz $-\frac{1}{2}$. **Teraz sprawdzimy, czy są to rzeczywiście rozwiązania równania** $\dfrac{2x^2-x-1}{x^3-5x^2+2x+2}=0$. Wystarczy obliczyć wartość wielomianu $G(x)=x^3-5x^2+2x+2$, dla każdej z nich.

$$G(1)=1^3-5\cdot 1^2+2\cdot 1+2=1-5+2+2=0,$$

$$G\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^3-5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2=-\frac{1}{8}-\frac{5}{4}-1+2=-\frac{1}{8}-\frac{10}{8}+1=-1\frac{3}{8}+1=-\frac{3}{8}\neq 0.$$

Dla $x=1$ mianownik jest równy zeru, czyli 1 nie należy do dziedziny , więc nie jest rozwiązaniem wyjściowego równania. Dla $x=-\frac{1}{2}$ mianownik przyjmuje wartości różne od zera, więc $x=-\frac{1}{2}$ jest rozwiązaniem wyjściowego równania.

Przejdźmy teraz do równań, które wymagają wcześniejszych, prostych przekształceń prowadzących do równania typu $\dfrac{W(x)}{G(x)}=0$. Najpierw rozwiążmy równanie, które pojawiło się już na maturze.

Zadanie 4. (Egzamin maturalny – maj 2010, s. 4, zadanie 6)

Rozwiązaniem równania $\frac{3x-1}{7x+1}=\frac{2}{5}$ jest

A. 1 **B.** $\frac{7}{3}$ **C.** $\frac{4}{7}$ **D.** 7

Rozwiązanie

Nie warto sprawdzać, która z wymienionych liczb jest rozwiązaniem, bo operując na ułamkach można łatwo popełnić błąd rachunkowy. Zacznijmy od zapisania dziedziny: $7x+1\neq 0,\ x\neq -\frac{1}{7}$. A teraz „wymnóżmy na krzyż” otrzymując, przy uwzględnieniu dziedziny, postać równoważną:

$$(3x-1)\cdot 5=2\cdot(7x+1)\,.$$

Stąd kolejno otrzymujemy

$$15x-5=14x+2\,,$$

$$15x-14x=2-(-5)\,,$$

$$x=7\,.$$

Zaznaczamy odpowiedź **D**.

Uwaga. Wyznaczenie dziedziny tego równania nie jest konieczne. Możemy przypuścić, że jest taka liczba, która jest rozwiązaniem tego równania. Wówczas „mnożąc na krzyż” i wykonując wszystkie przekształcenia jak poprzednio, dojdziemy do wniosku, że taką liczbą może być jedynie $x=7$. A skoro jedna z podanych odpowiedzi jest poprawna, to oznacza, że jest to odpowiedź **D**.

Zadanie 5.

Rozwiąż równanie $\frac{x-1}{x}+x=1$

Rozwiązanie

Mianownik musi być różny od zera, czyli $x\neq 0$. Doprowadzimy teraz wszystkie wyrażenia do wspólnego mianownika. Mamy kolejno

$$\frac{x-1}{x}+x\cdot\frac{x}{x}=1\cdot\frac{x}{x}\,,$$

$$\frac{x-1}{x}+\frac{x^2}{x}=\frac{x}{x}\,.$$

„Przeniesiemy” wszystkie wyrażenia na lewą stronę i zapiszemy na wspólnej kresce ułamkowej

$$\frac{x-1+x^2-x}{x}=0\,,$$

skąd po redukcji wyrazów podobnych dostaniemy

$$\frac{x^2-1}{x}=0\,.$$

Pozostaje rozwiązać równanie kwadratowe $x^2-1=0$. Jego pierwiastkami są liczby 1 oraz -1. Każda z nich jest różna od 0, są to więc rozwiązania wyjściowego równania.

Zważywszy na wymagania określone w podstawie programowej, powinniśmy być biegli w szkicowaniu wykresów funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$**.** Oczywiście, bezpośrednio z definicji funkcji wymiernej wynika, że dziedziną tak określonej funkcji jest zbiór $D=R\setminus\{0\}$.

Funkcja $f(x)=\frac{a}{x}$, dla dowolnej, ale różnej od zera wartości *a*, jest szczególnym przypadkiem tzw. funkcji homograficznej. Wcześniejsze roczniki maturzystów rozwiązywały między innymi następujące zadanie.

Zadanie 6. (Egzamin maturalny – sierpień 2010, s. 4, zadanie 13)

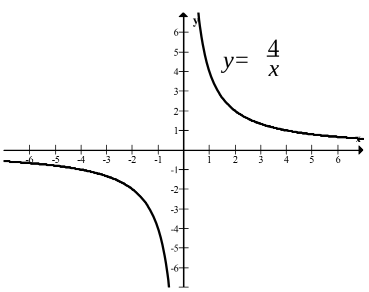
Do wykresu funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$ dla $x\neq 0$ należy punkt $A=(2,6)$. Wtedy

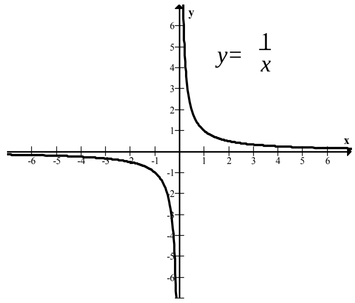
A. $a=2$ **B.** $a=6$ **C.** $a=8$ **D.** $a=12$

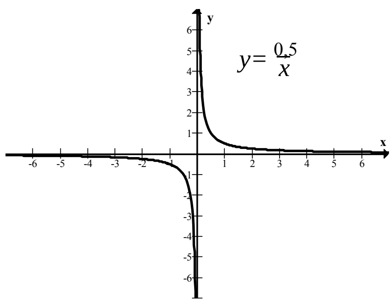
Rozwiązanie

Skoro punkt należy do wykresu funkcji, to jego współrzędne spełniają równanie definiujące tę funkcję. Zatem $6=\frac{a}{2}$, a stąd natychmiast otrzymujemy $a=6\cdot 2$. Zaznaczamy odpowiedź **D**.

Wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola. Na poniższym rysunku przedstawiono **wykresy dla** trzech różnych **dodatnich wartości współczynnika** ***a*****.**

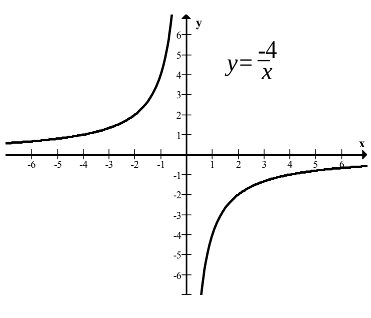


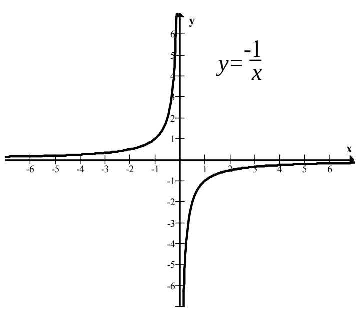


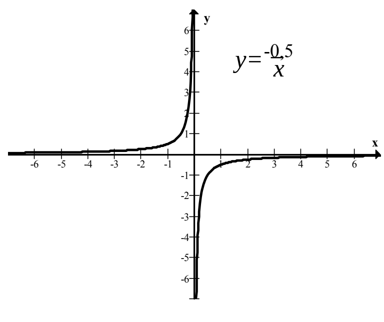


Ramiona hiperboli znajdują się „tylko” w I i III ćwiartce układu współrzędnych.

Poniższe **wykresy** pokazują, że **dla ujemnych wartości współczynnika** *a*, ramiona hiperboli znajdują się w II i IV ćwiartce układu.







Uwaga. Ramiona hiperbol, niezależnie od znaku parametru *a*, zbliżają się do osi układu współrzędnych (mówimy, że dążą asymptotycznie do tych osi lub, że osie *Ox* i *Oy* układu są odpowiednio asymptotą poziomą i pionową wykresu). Wykres jest ponadto symetryczny względem początku układu współrzędnych.

Zadanie 7.

Dana jest funkcja $f(x)=\frac{4}{x}$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x)=f(x)-2$. Na podstawie wykresu podaj:

a) zbiór wartości funkcji *g*,

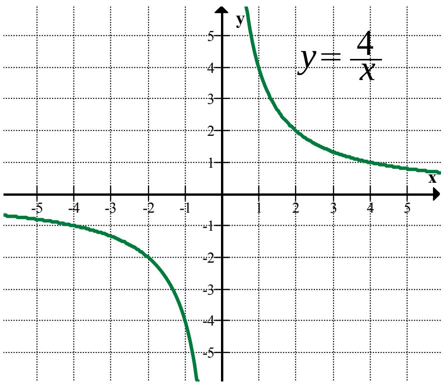
b) miejsce zerowe funkcji *g*,

c) zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie,

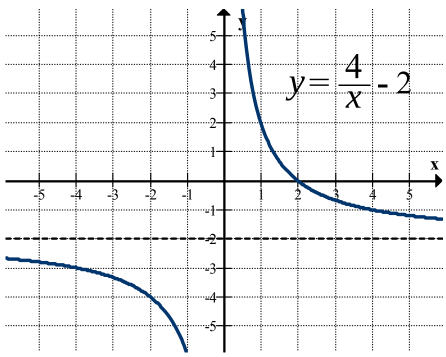
d) zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja *g* przyjmuje wartości mniejsze od 2.

Rozwiązanie

Wykresem funkcji *f* jest hiperbola przedstawiona na rysunku 1.



Rys. 1.



Rys. 2

Wykres funkcji *g* uzyskamy przesuwając wykres funkcji *f* o 2 jednostki w dół wzdłuż osi *Oy*. Wykres funkcji *g* został przedstawiony na rysunku 2. Z tego wykresu odczytujemy kolejno:

a) zbiór wartości funkcji: $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$. Możemy go również zapisać w postaci $R\setminus\{-2\}$.

b) jedyne jej miejsce zerowe: $x=2$. Krótko zapisujemy $f(x)=0$ dla $x=2$.

c) zbiór argumentów, dla których funkcja *g* przyjmuje wartości dodatnie: $(0,2)$.

To możemy zapisać symbolicznie $f(x)>0$ dla $x\in(0,2)$.

d) zbiór argumentów, dla których funkcja *g* przyjmuje wartości mniejsze od 2:

$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$. To z kolei możemy zapisać w postaci $f(x)<2$ dla $x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

VIII. CIĄGI

W zadaniach maturalnych z poziomu podstawowego ciągi pojawiają się zarówno w części zamkniętej, jako również – stosunkowo często – w części otwartej.

Jedną z umiejętności dotyczącą ciągów, jaką powinien opanować każdy przystępujący do egzaminu maturalnego, jest umiejętność wykorzystania wzoru ciągu. Często jesteśmy proszeni o podanie, czy też obliczenie, jakiegoś wyrazu ciągu.
Zilustrujemy umiejętności wykorzystania wzoru ogólnego ciągu, na przykładzie kolejnych zadań.

Zadanie 1. (Informator maturalny, s. 20, zadanie 2)
Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2-n}{n^2}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Oblicz a_2, a_4 i a_5.

Rozwiązanie
Mamy podany wzór ogólny ciągu (a_n). Należy obliczyć kolejno: a_2, a_4 i a_5, czyli drugi, czwarty i piąty wyraz tego ciągu. Wstawiając za *n* liczbę 2 dostajemy

$$a_2 = (-1)^2 \cdot \frac{2-2}{2^2} = 0.$$

Tak samo postępujemy obliczając dwa pozostałe wyrazy:

$$a_4 = (-1)^4 \cdot \frac{2-4}{4^2} = 1 \cdot \frac{-2}{16} = -\frac{1}{8},$$

$$a_5 = (-1)^5 \cdot \frac{2-5}{5^2} = -1 \cdot \frac{-3}{25} = \frac{3}{25}.$$

Odpowiedź: $a_2 = 0$, $a_4 = -\frac{1}{8}$, $a_5 = \frac{3}{25}$.

Zadanie 2. (Informator maturalny, s. 81, zadanie 35)
Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = (-3)^n \cdot \left(9 - n^2\right)$ dla $n \geq 1$. Wynika stąd, że

A. $a_3 = -81$ **B.** $a_3 = -27$ **C.** $a_3 = 0$ **D.** $a_3 > 0$

Rozwiązanie
Żeby wskazać poprawną odpowiedź najprościej będzie po prostu obliczyć trzeci wyraz tego ciągu. Ponieważ $a_3 = (-3)^3 \cdot \left(9 - 3^2\right) = (-3)^3 \cdot 0 = 0$, to poprawną odpowiedzią jest **C**.

Jako ćwiczenie proponujemy rozwiązać kolejne zadanie.

Zadanie 3. (Próbny egzamin maturalny – listopad 2009, s. 4, zadanie 12)
Dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ ciąg (a_n) jest określony wzorem: $a_n = (-1)^n \cdot (3 - n)$. Wtedy

A. $a_3 < 0$ **B.** $a_3 = 0$ **C.** $a_3 = 1$ **D.** $a_3 > 1$

Spośród wszystkich ciągów liczbowych dwa typy ciągów są szczególnie ważne. Są to ciągi arytmetyczne oraz ciągi geometryczne. Wszystkie arkusze opublikowane przez CKE, począwszy od próbnego egzaminu w listopadzie 2009 roku, a skończywszy na egzaminie próbnym z listopada 2010 roku, zawierają zadania „z ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego". Dlatego dalszą część tego opracowania poświęcimy tym dwóm rodzajom ciągów.

Ciąg arytmetyczny to taki ciąg liczbowy, w którym każdy wyraz z wyjątkiem wyrazu pierwszego, jest sumą wyrazu poprzedniego i ustalonej liczby zwanej różnicą ciągu arytmetycznego. Tę różnicę oznaczamy zazwyczaj przez *r*. Poza definicją posługujemy się często wzorem na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego: $a_n = a_1 + (n-1)r$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$.
W rozwiązywaniu zadań bardzo przydatna jest jedna z własności ciągu arytmetycznego, którą zapisujemy krótko w postaci zależności $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ dla $n = 2, 3, 4, \ldots$. Własność ta mówi, że jeśli ciąg (a_n) jest arytmetyczny, to każdy jego wyraz z wyjątkiem pierwszego (i ostatniego, gdy ciąg jest skończony) jest średnią arytmetyczną wyrazów bezpośrednio z nim sąsiadujących i na odwrót, tzn. jeśli ciąg (a_n) ma tę własność, że każdy jego wyraz z wyjątkiem pierwszego (i ostatniego, gdy ciąg jest skończony) jest średnią arytmetyczną wyrazów bezpośrednio z nim sąsiadujących, to ciąg ten jest arytmetyczny.
Niekiedy konieczne jest obliczenie sumy *n*-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. Wówczas możemy skorzystać ze wzoru $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Rozwiążmy kilka zadań dotyczących ciągu arytmetycznego.

Zadanie 4. (Informator maturalny, s. 36, zadanie 5)
Liczby: 1, 3, $x-11$, w podanej kolejności, są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Liczba *x* jest równa

A. 5 **B.** 9 **C.** 16 **D.** 20

Rozwiązanie
Ponieważ jest to zadanie zamknięte, więc możemy wyeliminować błędne odpowiedzi, sprawdzając, jaki ciąg otrzymamy dla każdej z podanych wartości *x*.
Dla $x = 5$ trzeci wyraz podanego w treści zadania ciągu jest równy $5 - 11 = -6$.
Otrzymaliśmy ciąg $(1, 3, -6)$, który arytmetyczny nie jest, bo różnica między drugim i pierwszym jego wyrazem jest równa 2, natomiast różnica między trzecim a drugim jego wyrazem jest równa -9 (w przypadku ciągu arytmetycznego obie te różnice byłyby sobie równe).

Tak samo łatwo eliminujemy $x=9$, bo otrzymujemy ciąg $(1, 3, -2)$, który nie jest arytmetyczny. Gdy $x=16$, to dostajemy ciąg $(1, 3, 5)$, a to jest ciąg arytmetyczny o różnicy 2. Zatem odpowiedzi **D** możemy już nie sprawdzać (tylko jedna spośród podanych jest prawdziwa).

Mogliśmy również obliczyć te wszystkie wartości *x*, dla których ciąg $(1, 3, x-11)$ jest arytmetyczny. Różnicę ciągu obliczamy natychmiast odejmując od drugiego wyrazu pierwszy, $r=3-1=2$. Ale trzeci wyraz jest sumą drugiego wyrazu i różnicy ciągu, więc $x-11=3+2$. Stąd $x=16$. Mogliśmy także wykorzystać własność ciągu arytmetycznego i wówczas dostalibyśmy równanie $3=\frac{1+(x-11)}{2}$, z którego obliczamy $x=16$.

Jako ćwiczenie proponujemy rozwiązanie zadań 5 i 6.

Zadanie 5. (Informator maturalny, s. 81, zadanie 36)

Liczby $x-1$, 4 i 8 (w podanej kolejności) są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Wówczas liczba *x* jest równa

A. 3 **B.** 1 **C.** -1 **D.** -7

Zadanie 6. (Informator maturalny, s. 64, zadanie 25)

Liczby $x-2$, 3, $x+6$ są w podanej kolejności pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz *x*.

Zadanie 7. (Próbny egzamin maturalny – listopad 2009, s. 4, zadanie 13)

W ciągu arytmetycznym trzeci wyraz jest równy 14, a jedenasty jest równy 34. Różnica tego ciągu jest równa

A. 9 **B.** $\frac{5}{2}$ **C.** 2 **D.** $\frac{2}{5}$

Rozwiązanie

Oznaczmy *n*-ty wyraz tego ciągu przez a_n oraz różnicę tego ciągu przez *r*. Wtedy treść zadania zapiszemy krótko $a_3=14$ oraz $a_{11}=34$. Wykorzystując dwukrotnie wzór na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego możemy te równości zapisać w postaci

$$a_1+2r=14 \text{ oraz } a_1+10r=34.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób układ równań z niewiadomymi a_1 i *r*. Nas interesuje jedynie *r*. Odejmując stronami te równania (od drugiego pierwsze) otrzymujemy $8r=20$.

Skąd $r=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$, więc poprawna odpowiedź to **B**.

Jako ćwiczenie proponujemy rozwiązanie zadania 8.

Zadanie 8. (Egzamin maturalny- maj 2010, s. 4, zadanie 11)

W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są: $a_3 = 13$ i $a_5 = 39$. Wtedy wyraz a_1 jest równy

A. 13 **B.** 0 **C.** -13 **D.** -26

W kolejnych dwóch zadaniach zastosujemy wzór na sumę *n*-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Zadanie 9. (Próbny egzamin maturalny – listopad 2010, s. 6, zadanie 15)

W ciągu arytmetycznym $a_1 = 3$ oraz $a_{20} = 7$. Wtedy suma $S_{20} = a_1 + a_2 + ... + a_{19} + a_{20}$ jest równa

A. 95 **B.** 200 **C.** 230 **D.** 100

Rozwiązanie

Przeanalizujmy to, co mamy dane i to, co chcemy obliczyć. Mamy dany pierwszy i dwudziesty wyraz ciągu arytmetycznego, a chcemy znać sumę dwudziestu początkowych wyrazów tego ciągu. Wykorzystamy wzór na sumę *n*-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, który podany został tuż przed zadaniem 5. Na egzaminie zawsze można go znaleźć w *Zestawie wzorów* (strona 3). Dla sumy dwudziestu początkowych wyrazów wzór ten ma postać

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20$$

Teraz wystarczy już tylko wstawić do tego wzoru dane wyrazy i mamy

$$S_{20} = \frac{3+7}{2} \cdot 20 = 100$$

Poprawną odpowiedzią jest zatem **D**.

Zadanie 10. (Informator maturalny, s. 26, zadanie 7)

Rozwiąż równanie $(2x+1)+(2x+4)+(2x+7)+\ldots+(2x+28)=155$, jeśli wiadomo, że składniki po lewej stronie są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego.

Rozwiązanie

Ponieważ wiemy, że składniki, które występują po lewej stronie równania to kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego, więc odejmując od drugiego składnika pierwszy obliczamy różnicę ciągu. Jest ona równa $(2x+4)-(2x+1)=3$. Jeśli tak, to lewa strona jest równa

$(2x+1)+(2x+4)+(2x+7)+(2x+10)+(2x+13)+(2x+16)+(2x+19)+(2x+22)+(2x+25)+(2x+28)$,

a po uproszczeniu $20x+145$, więc równanie ma postać

$$20x+145=155.$$

Stąd obliczamy $x=\frac{1}{2}$. W przedstawionym sposobie wykorzystaliśmy jedynie informację o tym, że kolejne składniki to wyrazy ciągu arytmetycznego. Na tej podstawie wyznaczyliśmy pozostałe składniki sumy „ukryte” pod postacią wielokropka. Oczywiście znacznie bardziej żmudny byłoby taki sposób rozwiązania, gdyby po lewej stronie było o wiele więcej składników.

Przejdźmy teraz do ciągu geometrycznego. **Ciąg geometryczny** to taki ciąg liczbowy, w którym każdy wyraz z wyjątkiem wyrazu pierwszego, jest iloczynem wyrazu poprzedniego i ustalonej liczby zwanej ilorazem ciągu geometrycznego. Iloraz ciągu geometrycznego oznaczamy zwykle *q*. Poza definicją posługujemy się często wzorem na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ dla $n = 2, 3, \ldots$. (dla $n = 1$ wzór ten również jest prawdziwy, o ile $q \neq 0$). Ciąg geometryczny ma również – podobnie jak ciąg arytmetyczny – własność często wykorzystywaną przy rozwiązywaniu zadań. Zapisujemy ją krótko w postaci zależności $a_n{}^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$ dla $n = 2, 3, 4, \ldots$. Przypomnijmy, że jeśli $q \neq 1$, to sumę *n*-początkowych wyrazów tego ciągu obliczamy ze wzoru

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots ,$$

natomiast jeśli $q = 1$, to wzoru tego zastosować nie możemy (w mianowniku otrzymalibyśmy wówczas 0), ale wtedy wszystkie wyrazu ciągu są takie same, więc wówczas

$$S_n = n \cdot a_1 \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Zadanie 11. (Próbny egzamin maturalny – listopad 2010, s. 6, zadanie 14)

W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_1 = 2$ i $a_2 = 12$. Wtedy

A. $a_4 = 26$ B. $a_4 = 432$ C. $a_4 = 32$ D. $a_4 = 2592$

Rozwiązanie

Na podstawie pierwszego i drugiego wyrazu ciągu geometrycznego obliczamy iloraz tego ciągu. Iloraz ten jest równy 6. Zatem obliczając kolejno trzeci i czwarty wyraz otrzymujemy

$$a_3 = a_2 \cdot q = 12 \cdot 6 = 72,\ a_4 = a_3 \cdot q = 72 \cdot 6 = 432,$$

więc poprawna odpowiedź to **B**.

Jako ćwiczenie proponujemy rozwiązanie zadań 12 i 13.

Zadanie 12. (Informator maturalny, s. 42, zadanie 24)

Trzeci wyraz ciągu geometrycznego jest równy 4, a czwarty wyraz tego ciągu jest równy -2. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy

A. 16 **B.** -16 **C.** 8 **D.** -8

Zadanie 13. (Informator maturalny, s. 54, zadanie 10)

Trzeci wyraz ciągu geometrycznego jest równy 4, a piąty wyraz tego ciągu jest równy 1. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy

A. 4 **B.** $4\sqrt{2}$ **C.** 16 **D.** $16\sqrt{2}$

Przedstawimy teraz rozwiązanie kolejnego zadania.

Zadanie 14. (Informator maturalny, s. 81, zadanie 37)

Liczby -8, 4 i $x+1$ (w podanej kolejności) są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Wówczas liczba x jest równa

A. -3 **B.** $-1{,}5$ **C.** 1 **D.** 15

Rozwiązanie

Pierwszy wyraz ciągu jest równy -8, drugi jest równy 4, więc iloraz tego ciągu jest równy $q=\frac{4}{-8}=-\frac{1}{2}$. Ponieważ trzeci wyraz to iloczyn wyrazu drugiego i ilorazu ciągu, więc jest równy $4\cdot q=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$. Porównując to z podanym trzecim wyrazem dostajemy równanie

$$x+1=-2.$$

Stąd $x=-3$. Poprawna odpowiedź to **A**.

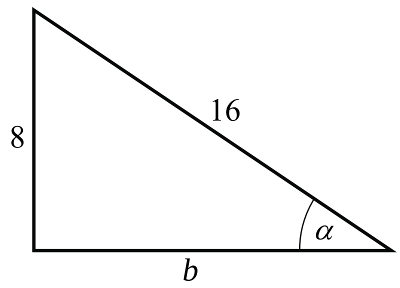
IX. FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE

Już w gimnazjum omawiane były związki miarowe w trójkątach prostokątnych, których odpowiednie kąty były równe $30°, 45°, 60°$. Ale w dowolnym trójkącie badanie związków miarowych w zasadzie wymaga stosowania funkcji trygonometrycznych. Definicje funkcji oraz podstawowe związki między nimi podane są w *Zestawie wzorów* na stronach 14 i 15.

Zadanie 1.

W trójkącie prostokątnym o kącie ostrym α, przeciwprostokątna na długość 16, a przyprostokątna leżąca naprzeciw tego kąta ma długość 8. Oblicz wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kąta α oraz miarę tego kąta.

Rozwiązanie



Zauważmy, że „mamy wszystko” by obliczyć wartość funkcji sinus: $\sin\alpha = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$. Aby obliczyć wartość funkcji kosinus możemy skorzystać, ze wzoru nazwanego jedynką trygonometryczną (patrz *Zestaw wzorów*): $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Ponieważ $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, więc możemy zapisać równanie

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Stąd

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ lub } \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Kąt α jest ostry, więc wszystkie funkcje trygonometryczne tego kąta są dodatnie, czyli $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Aby wyznaczyć tangens kąta α wykorzystamy równość $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (patrz *Zestaw wzorów*). Stąd $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Pozostaje podać miarę kąta. Ponieważ $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, więc $\alpha = 30°$.

Możemy też, zamiast wykorzystywać związek między sinusem, cosinusem i tangensem tego samego kąta, postąpić inaczej. Z twierdzenia Pitagorasa obliczmy długość trzeciego boku – przyprostokątnej *b*. Otrzymujemy kolejno

$$b^2 + 8^2 = 16^2,$$

$$b^2 + 64 = 256,$$

$$b^2 = 256 - 64,$$

$$b^2 = 192.$$

Ponieważ $b > 0$, więc $b = \sqrt{192} = \sqrt{3 \cdot 64} = 8\sqrt{3}$. Teraz już możemy obliczyć wartości pozostałych funkcji korzystając jedynie z ich definicji (także podanych w *Zestawie wzorów*):

$$\cos\alpha = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{8\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Na maturze pojawiło się poniższe zadanie.

Zadanie 2. (Egzamin maturalny – sierpień 2010, s. 6, zadanie 16)

Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{3}{4}$. Wtedy $\sin\alpha$ jest równy

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\frac{\sqrt{7}}{4}$ **D.** $\frac{7}{16}$

Rozwiązanie

<u>Pierwszy sposób</u>

Ponieważ $\cos\alpha = \frac{3}{4}$ oraz **dla wszystkich wartości kąta zachodzi wzór** $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (zwany jedynką trygonometryczną), więc podstawiając w miejsce cosinusa ułamek $\frac{3}{4}$ otrzymujemy

$$\sin^2\alpha + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1,$$

$$\sin^2\alpha + \frac{9}{16} = 1,$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16},$$

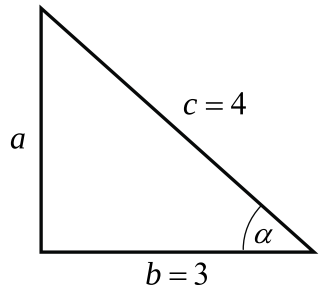
$$\sin^2\alpha = \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2.$$

Stąd wartość funkcji sinus może być równa $\frac{\sqrt{7}}{4}$ lub $-\frac{\sqrt{7}}{4}$. Ale dla kątów ostrych wartości wszystkich funkcji trygonometrycznych są dodatnie, zatem $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Zaznaczamy odpowiedź **C**.

Drugi sposób

Skorzystamy teraz z metody, która sprowadza to zadanie do trójkąta prostokątnego.

Zbudujmy trójkąt prostokątny, dla którego $\cos\alpha = \frac{3}{4}$. Jest ich wiele, ale jednym z nich jest ten, w którym przeciwprostokątna ma długość 4, a przyprostokątna leżąca przy kącie ma długość 3 (patrz rysunek).



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa obliczymy długość drugiej przyprostokątnej

$$3^2 + a^2 = 4^2,$$

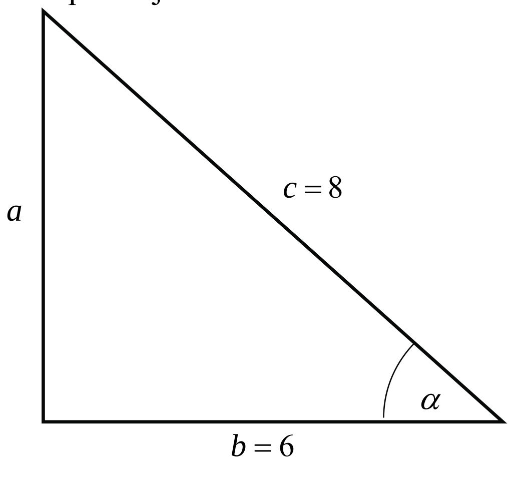
$$a^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7,$$

$$a = \sqrt{7}.$$

Teraz możemy obliczyć wartość sinusa kąta α (również i pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta)

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

A co byłoby gdybyśmy narysowali inny trójkąt, w którym cosinus także jest równy $\frac{3}{4}$?
Na przykład taki, jak na rysunku poniżej.



Też otrzymalibyśmy poprawne rozwiązanie. Po skorzystaniu z twierdzenia Pitagorasa dostalibyśmy

$$6^2 + a^2 = 8^2,$$

$$a^2 = 8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28,$$

$$a = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}.$$

Stąd sinus byłby równy

$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{7}}{8} = \frac{\sqrt{7}}{4},$$

a więc tak samo jak wcześniej. Tych samych wyników należało oczekiwać, gdyż **oba rozpatrywane trójkąty są podobne, więc ich odpowiednie kąty są takie same, a skoro tak, to i wartości funkcji trygonometrycznych tych kątów są jednakowe.**

W maju 2010 r. zdający musieli rozwiązać dwa następujące zadania.

Zadanie 3. (Egzamin maturalny – maj 2010, s.6, zadanie 14)

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{3}{4}$. Wartość wyrażenia $2-\cos^2\alpha$ jest równa

A. $\frac{25}{16}$ **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{17}{16}$ **D.** $\frac{31}{16}$

Rozwiązanie

Tym razem proponujemy zastosować jedynkę trygonometryczną. Ponieważ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, więc $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$. Podstawiając $\sin\alpha=\frac{3}{4}$ mamy

$$\cos^2\alpha = 1-\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1-\frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$

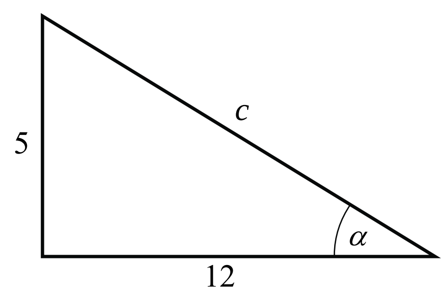
Zatem wartość wyrażenia jest równa $2-\cos^2\alpha = 2-\frac{7}{16} = \frac{32}{16}-\frac{7}{16} = \frac{25}{16}$. Zaznaczamy **A**.

Zadanie 4. (Egzamin maturalny – maj 2010, s. 12, zadanie 29)

Kąt α jest ostry i $\mathrm{tg}\alpha = \frac{5}{12}$. Oblicz $\cos\alpha$.

Rozwiązanie

Tym razem proponujemy narysować odpowiedni trójkąt prostokątny i zastosować twierdzenie Pitagorasa.



Otrzymujemy wówczas

$$5^2+12^2=c^2,$$

$$25+144=c^2,$$

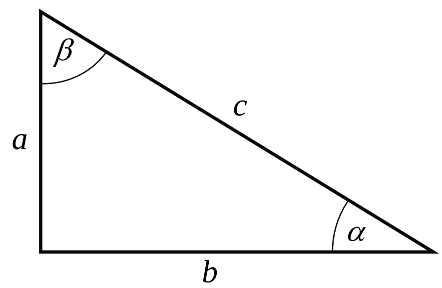
$$169=c^2,$$

$$13^2 = c^2,$$

$$c = 13.$$

Zatem $\cos\alpha = \frac{12}{13}$.

Dotychczas zawsze interesował nas jeden z kątów ostrych w trójkącie prostokątnym, który nazywaliśmy α. A przecież jest również drugi kąt ostry – oznaczmy go β.



Suma miar wszystkich trzech kątów trójkąta jest równa $180°$, jeden z kątów ma miarę $90°$, więc $\alpha + \beta + 90° = 180°$. Stąd otrzymujemy $\alpha + \beta = 180° - 90° = 90°$, czyli $\beta = 90° - \alpha$. **Zauważmy ponadto, że** $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta$**, oraz** $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta$**. Prawdziwy jest więc wzór** $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$ **.**

Zadanie 5.

Kąty α oraz β mają odpowiednio miary $34°20'$ i $55°40'$. Oblicz dokładną wartość wyrażenia $\sin^2\alpha + \sin^2\beta$.

Rozwiązanie

Punktem wyjścia musi być spostrzeżenie, że $34°20' + 55°40' = 90°$. Czyli kąty α oraz β są kątami ostrymi w pewnym trójkącie prostokątnym. Zastosujemy zależność $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$ dla kąta $\alpha = 34°20'$, wtedy $\sin(90° - 34°20') = \cos 34°20'$, ale jak wcześniej zauważyliśmy $90° - 34°20' = 55°40'$, czyli

$$\sin 55°40' = \sin(90° - 34°20') = \cos 34°20'.$$

Wróćmy do wyrażenia, którego wartość mamy obliczyć

$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin^2 34°20' + \sin^2 55°40'$.

Zamiast $\sin 55°40'$ możemy podstawić $\cos 34°20'$, gdyż wyżej tę równość wykazaliśmy. Wtedy możemy kontynuować

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin^2 34°20' + \sin^2 55°40' = \sin^2 34°20' + \cos^2 34°20'.$$

Dla dowolnego kąta φ prawdziwa jest tożsamość $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, więc w szczególności jest też prawdziwa dla $\varphi = 34°20'$. Stąd $\sin^2 34°20' + \cos^2 34°20' = 1$.

Nie zawsze jednak potrafimy podać dokładne miary kąta dla zadanych funkcji trygonometrycznych. Musimy wówczas korzystać z tablic zamieszczonych w *Zestawie wzorów*. Rozwiązując poniższe zadanie, przypomnimy jak z nich korzystać.

Zadanie 6.

W trójkącie prostokątnym o kącie ostrym α, przyprostokątna leżąca naprzeciw tego kąta ma długość 32, a przyprostokątna leżąca przy tym kącie ma długość 25. Podaj, z dokładnością do jednego stopnia, miarę kąta α.

Rozwiązanie

Tym razem „najłatwiej” skorzystać z funkcji tangens. Mamy $\mathrm{tg}\alpha = \frac{32}{25} = 1,28$. Trudno „odgadnąć” kąt, którego tangens ma wartość 1,28. Posłużymy się tablicami zawierającymi przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych. Znajdziemy je również w *Zestawie wzorów* na stronie 17. Fragment tych tablic został przedstawiony poniżej.

$\alpha[°]$	$\sin\alpha$ $\cos\beta$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\beta[°]$
46	0,7193	1,0355	44
47	0,7314	1,0724	43
48	0,7431	1,1106	42
49	0,7547	1,1504	41
50	**0,7660**	**1,1918**	**40**
51	0,7771	1,2349	39
52	0,7880	**1,2799**	38
53	0,7986	1,3270	37

W kolumnie odpowiadającej funkcji tangens zaznaczona jest wartość, która jest najbliższa wartości 1,28; w pierwszej kolumnie odczytujemy wartość kąta α, dla którego funkcja tangens przyjmuje wartość 1,2799 . Jest to $52°$.

X. GEOMETRIA ANALITYCZNA – ODLEGŁOŚĆ, PROSTA

Geometria analityczna nie występuje najczęściej jako oddzielny dział matematyki realizowany w szkole. Umiejętności z geometrii analitycznej są porozrzucane po całym programie nauczania. Dlatego warto zebrać i omówić je w jednym miejscu. Tu omówimy pojęcie odległości między dwoma punktami na płaszczyźnie kartezjańskiej oraz pokażemy na wybranych przykładach zadań zastosowanie równania prostej. Równania prostych prostopadłych oraz równania prostych równoległych zostały omówione w rozdziale *Funkcja liniowa*.

Odległość między punktami w układzie współrzędnych na płaszczyźnie. Mając dane współrzędne dwóch punktów *A* i *B* możemy obliczyć odległość między tymi punktami. Odległość miedzy punktami *A* i *B* oznaczamy najczęściej symbolem $|AB|$ lub *AB*. Jeśli zatem $A=(x_A,y_A)$ i $B=(x_B,y_B)$, to odległość $|AB|$ możemy obliczyć stosując wzór

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

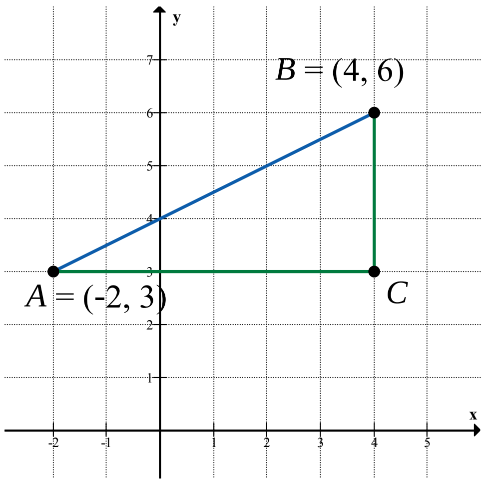
Zadanie 1. (Próbny egzamin maturalny – listopad 2009, s. 6, zadanie 19)

Dane są punkty $A=(-2,3)$, $B=(4,6)$. Długość odcinka *AB* jest równa

A. $\sqrt{208}$ **B.** $\sqrt{52}$ **C.** $\sqrt{45}$ **D.** $\sqrt{40}$

Rozwiązanie

Wykonanie rysunku w zadaniu pomaga najczęściej w jego rozwiązaniu. Niekiedy wykonanie dokładnego rysunku nie jest możliwe (np. współrzędne punktów są bardzo duże). W tym przypadku wykonanie rysunku nie powinno sprawić żadnych trudności.



Długość odcinka *AB*, czyli odległość między punktami *A* i *B* możemy obliczyć oczywiście bez znajomości podanego wzoru. Wystarczy uzupełnić rysunek o punkt *C* taki, żeby trójkąt *ABC* był prostokątny i odcinek *AB* był jego przeciwprostokątną i żeby przyprostokątne trójkąta były równoległe do osi układu współrzędnych. Wtedy nietrudno zauważyć, że $|AC| = 6$ i $|CB| = 3$. Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |CB|^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45}.$$

Stosując wzór na odległość między dwoma punktami na płaszczyźnie kartezjańskiej w istocie rzeczy wykorzystujemy twierdzenie Pitagorasa. Mamy wtedy

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (6 - 3)^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}.$$

Poprawną odpowiedzią jest więc **C**.

Podobnie można postąpić rozwiązując zadanie 2. To zadanie proponujemy jako ćwiczenie.

Zadanie 2. (Informator maturalny, s. 62, zadanie 21)

Punkty $A = (-3, -5)$, $B = (4, -1)$, $C = (-2, 3)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego. Oblicz długość ramienia tego trójkąta.

Najczęściej samo obliczenie odległości między dwoma punktami jest jednym z elementów rozwiązania. Zazwyczaj jest to element najważniejszy. Tak jest w kilku kolejnych zadaniach.

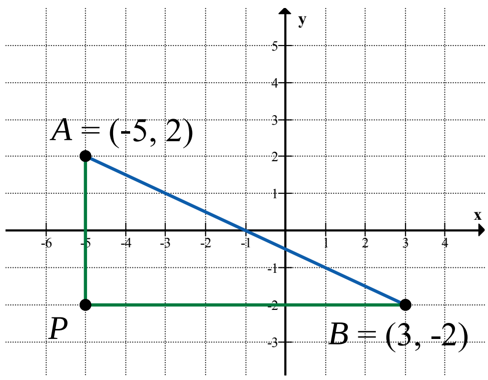
Zadanie 3. (Egzamin maturalny – maj 2010, s. 8, zadanie 22)

Punkty $A = (-5, 2)$ i $B = (3, -2)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego *ABC*. Obwód tego trójkąta jest równy

A. 30 **B.** $4\sqrt{5}$ **C.** $12\sqrt{5}$ **D.** 36

Rozwiązanie

Tu również możemy wykonać rysunek, na którym zaznaczamy odpowiedni punkt *P*,



Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy

$$|AB| = \sqrt{|AP|^2 + |PB|^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}.$$

Oczywiście ten sam rezultat uzyskamy stosując wzór na odległość między dwoma punktami na płaszczyźnie kartezjańskiej (*Zestaw wzorów*, strona 4)

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(3 - (-5))^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{8^2 + (-4)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

Obliczyliśmy długość boku trójkąta równobocznego, więc obwód tego trójkąta jest równy

$$3\cdot 4\sqrt{5}=12\sqrt{5}\ .$$

Poprawną odpowiedzią jest więc **C**.

Zadanie 4. (Informator maturalny, s. 22, zadanie 7)

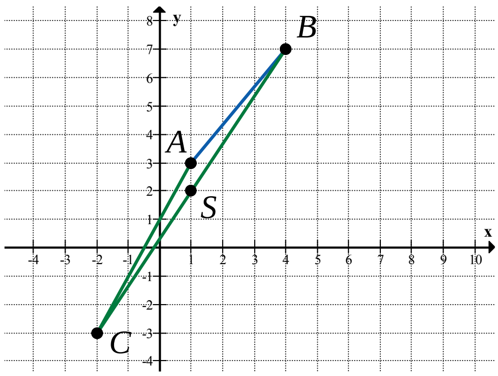
Oblicz odległość punktu *A* od środka odcinka *BC*, gdzie $A=(1,3)$, $B=(4,7)$, $C=(-2,-3)$.

Rozwiązanie

Niech *S* oznacza środek odcinka *BC*. Wtedy korzystając z podanych wzorów na współrzędne środka odcinka obliczamy

$$S=\left(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_B+y_C}{2}\right)=\left(\frac{4+(-2)}{2},\frac{7+(-3)}{2}\right)=(1,2).$$

Wykonanie rysunku w tym zadaniu utwierdzi nas w przekonaniu, że otrzymaliśmy dobre współrzędne.



Teraz możemy obliczyć odległość między punktem *A* i punktem *S*. Ponieważ pierwsze współrzędne tych punktów są równe, więc odległość tę możemy od razu podać obliczając jedynie wartość bezwzględną z różnicy drugich współrzędnych tych punktów, czyli od większej z tych współrzędnych odejmujemy mniejszą.

$$|AS|=|3-2|=1$$

Możemy oczywiście zastosować wzór na odległość między dwoma punktami uzyskując ten sam rezultat.

$$|AS|=\sqrt{(x_S-x_A)^2+(y_S-y_A)^2}=\sqrt{(1-1)^2+(2-3)^2}=\sqrt{0^2+(-1)^2}=\sqrt{1}=1$$

Odpowiedź. Odległość punktu *A* od środka odcinka *BC* jest równa 1.

Jako ćwiczenie proponujemy rozwiązanie zadania 5.

Zadanie 5.

Punkty $A=(-5,1)$ i $C=(9,-1)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu *ABCD*. Promień okręgu wpisanego w ten kwadrat jest równy

A. $10\sqrt{2}$ **B.** $5\sqrt{2}$ **C.** 5 **D.** 10

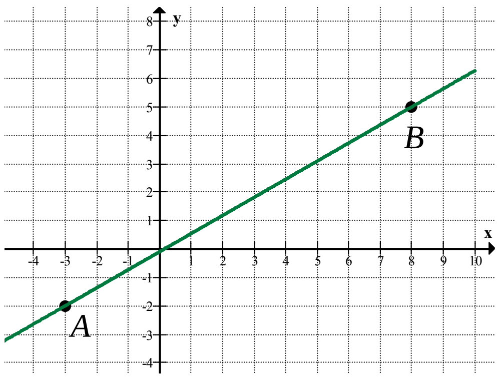
Jedną z podstawowych i ważnych umiejętności, która jest niezbędna do osiągnięcia sukcesu na egzaminie maturalnym z matematyki jest **umiejętność wyznaczania równania prostej** oraz umiejętność wykorzystania równania prostej, gdy jest ono dane. W kolejnych zadaniach będziemy te umiejętności ćwiczyć.

Przypomnijmy jednak najpierw, w jaki sposób wyznaczamy równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty. Zrobimy to rozwiązując poniższe zadanie.

Zadanie 6.

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $A=(3,5)$ i $B=(3,-2)$.

Rozwiązanie



Pierwsze współrzędne punktów *A* **i** *B* **nie są równe, więc prosta jest wykresem funkcji liniowej. Jej równanie możemy zapisać w postaci** $y=ax+b$**.**

Punkt $A=(-3,-2)$ leży na tej prostej, więc jego współrzędne spełniają jej równanie, czyli

$$-2=a\cdot(-3)+b.$$

Podobnie punkt $B=(8,5)$ leży na tej prostej, więc jego współrzędne również spełniają jej równanie, czyli

$$5=a\cdot 8+b.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób układ równań z niewiadomymi *a* i *b*.

$$\begin{cases}-2=a\cdot(-3)+b\\ 5=a\cdot 8+b\end{cases}.$$

Rozwiązujemy ten układ (najprościej odjąć stronami równanie pierwsze od drugiego)

$$7=11\cdot a,$$

skąd mamy

$$a=\frac{7}{11}.$$

Teraz wstawiając obliczone *a* do któregokolwiek równania układu obliczamy *b*.

$$5=\frac{7}{11}\cdot 8+b,$$

$$b=-\frac{1}{11}.$$

W rezultacie prosta *AB* ma równanie postaci $y=\frac{7}{11}x-\frac{1}{11}$.

Podany sposób wyznaczania równania prostej, jakkolwiek skuteczny, jest zazwyczaj czasochłonny, trzeba zwykle uporać się z rozwiązaniem układu równań, gdzie **nierzadko pojawiają się ułamki zwykłe, a jeśli tak, to o pomyłkę nietrudno**. **Znacznie szybciej wyznaczymy równanie prostej wykorzystując gotowy wzór**, który możemy znaleźć w *Zestawie wzorów* na stronie 5. Wzór ten ma postać

$$(y_B - y_A)(x - x_A) - (x_B - x_A)(y - y_A) = 0$$

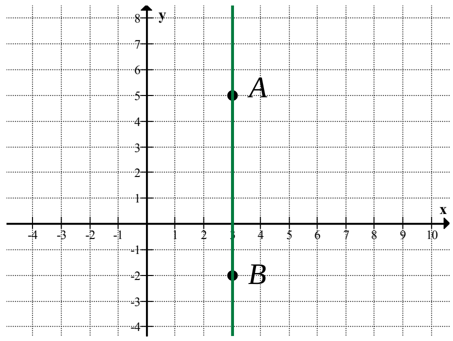
Zaletą tego wzoru jest to, że możemy go zastosować sytuacji, gdy pierwsze współrzędne danych punktów są równe, wtedy prostej nie można opisać równaniem kierunkowym.

Z taką sytuacją mamy do czynienia w kolejnym zdaniu.

Zadanie 7.

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $A=(3,5)$ i $B=(3,-2)$.

Rozwiązanie



Podstawiając współrzędne punktów *A* i *B* do podanego wzoru mamy

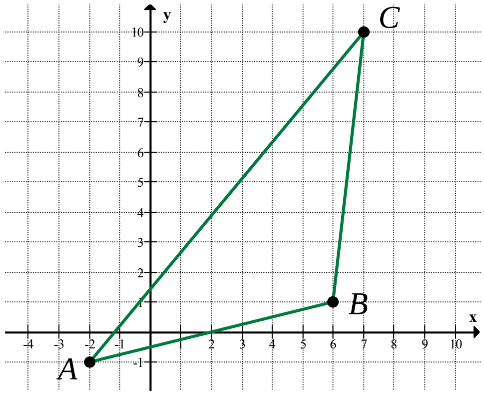
$(-2-5)(x-3)-(3-3)(y-5)=0$. Stąd $x=3$.

Zadanie 8. (Informator maturalny, s. 85, zadanie 64)

Wyznacz równanie prostej zawierającej środkową *CD* trójkąta *ABC*, którego wierzchołkami są punkty: $A=(-2,-1)$, $B=(6,1)$, $C=(7,10)$.

Rozwiązanie

Sporządzamy rysunek w układzie współrzędnych. Na razie zaznaczamy na nim punkty *ABC*. Później możemy go uzupełnić.



Wyznaczamy najpierw współrzędne punktu *D*, który jest środkiem boku *AB*

$$D=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\frac{-2+6}{2},\frac{-1+1}{2}\right)=(2,0).$$

Warto zaznaczyć ten punkt na sporządzonym rysunku i przekonać się, czy nasze obliczenia są poprawne.

Teraz pozostaje już tylko wyznaczyć równanie prostej zawierającej środkową *CD* trójkąta *ABC*. Stosując podany przed zadaniem wzór dostajemy

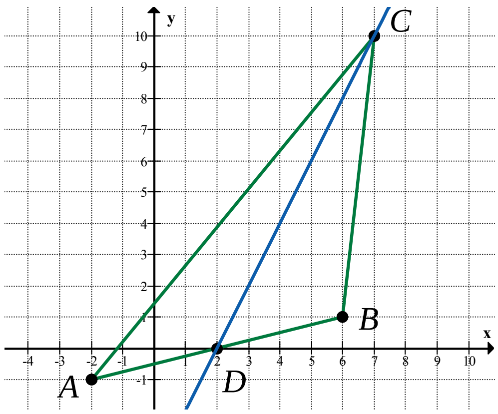
$$(10-0)(x-2)-(7-2)(y-0)=0,$$

$$10(x-2)-5y=0.$$

Dzieląc obie strony tego równania przez 5 otrzymujemy równanie w postaci

$$2x-y-4=0.$$

Jest to równanie prostej w postaci ogólnej. Łatwo z niej również otrzymać równanie w postaci kierunkowej, wystarczy dodać do obu stron równania *y*. Mamy wtedy $y=2x-4$. Możemy teraz uzupełnić nasz rysunek rysując prostą o wyznaczonym równaniu i sprawdzając poprawność naszych obliczeń.



Odpowiedź. Prosta zawierająca środkową *CD* trójkąta *ABC* ma równanie postaci $y=2x-4$.

XI. GEOMETRIA ANALITYCZNA – OKRĄG

Okręgiem jest zbiór punktów płaszczyzny, które są równo oddalone od jego środka. Tę odległość nazywamy promieniem i zwyczajowo oznaczamy literą r. Jeżeli przez $S=(a,b)$ oznaczymy w układzie współrzędnych środek okręgu, a przez (x, y) współrzędne dowolnego punktu P leżącego na okręgu, to korzystając ze wzoru na odległość między dwoma punktami w układzie współrzędnych na płaszczyźnie oraz równości $|SP|=r$ otrzymujemy

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r .$$

Po podniesieniu do kwadratu otrzymujemy równanie okręgu w postaci kanonicznej

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 .$$

Poniższe dwa zadania pokazują, że postać kanoniczna jest często wykorzystywana do budowania zadań maturalnych.

Zadanie 1. (Egzamin maturalny – maj 2010, s. 8, zadanie 21)

Wskaż równanie okręgu o promieniu 6.

A. $x^2+y^2=3$ **B.** $x^2+y^2=6$ **C.** $x^2+y^2=12$ **D.** $x^2+y^2=36$

Rozwiązanie

Po prawej stronie równania okręgu, w postaci kanonicznej, jest kwadrat długości promienia, więc zaznaczamy odpowiedź **D** (ponieważ $r^2=6^2=36$).

Zadanie 2. (Egzamin maturalny – sierpień 2010, s. 8, zadanie 21)

Okrąg o równaniu $(x+2)^2+(y-1)^2=13$ ma promień równy

A. $\sqrt{13}$ **B.** 13 **C.** 8 **D.** $2\sqrt{2}$

Rozwiązanie

Oczywiście z tego samego powodu jak wyżej, z równania wynika, że $r^2=13$, czyli $r=\sqrt{13}$. Zaznaczamy więc odpowiedź **A**.

Przejdźmy do umiejętności rysowania okręgów w układzie współrzędnych.

Zadanie 3.

Naszkicuj w układzie współrzędnych okrąg o równaniu $(x-3)^2+(y-4)^2=25$.

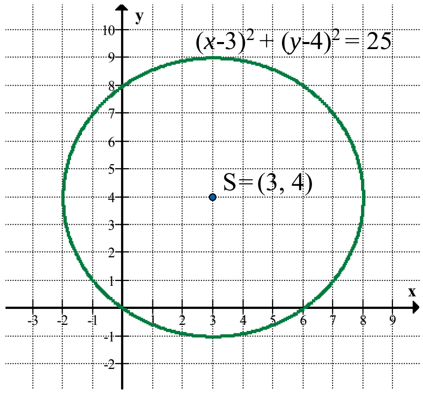
Rozwiązanie

Postać kanoniczna pozwala niemal „od razu" odczytać informacje niezbędne do naszkicowania okręgu. Zauważamy tylko, że $25=5^2$, czyli równanie można zapisać w postaci $(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$. Popatrzmy na oba równania – to z treści zadania, i to określające postać kanoniczną równania okręgu

$$(x-3)^2+(y-4)^2=5^2,$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Stąd widać, że $a=3$, $b=4$, $r=5$, co oznacza, że środkiem okręgu jest punkt $S=(3,4)$, a promień $r=5$.



Zadanie 4.

Naszkicuj w układzie współrzędnych okrąg o równaniu $(x+1)^2+(y-2)^2=8$.

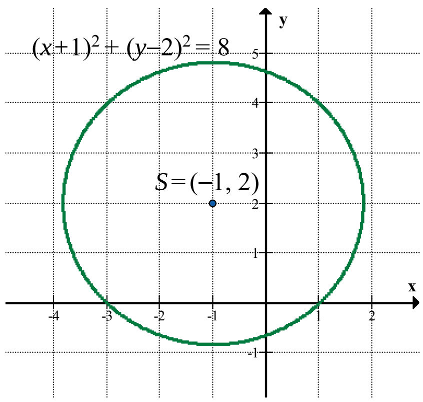
Rozwiązanie

Równanie można zapisać w postaci $(x+1)^2+(y-2)^2=\left(\sqrt{8}\right)^2$. **Powtórzmy „operację” porównywania równań z zadania i postaci kanonicznej**

$$(x+1)^2+(y-2)^2=\left(\sqrt{8}\right)^2,$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Stąd widać „od razu”, że $b=2$, $r=\sqrt{8}$. Żeby ustalić *a*, czyli pierwszą współrzędną środka okręgu, wystarczy zapisać wyrażenie $(x+1)$ w postaci $\left(x-(-1)\right)$. Teraz dopiero „widać”, że $a=-1$. Stąd $S=(-1,2)$, a promień $r=\sqrt{8}$.



Rozważmy teraz równanie z ostatniego zadania i zastosujmy wzory skróconego mnożenia, rozwijając odpowiednio wyrażenia $(x+1)^2$ oraz $(y-2)^2$. Ponieważ $(x+1)^2=x^2+2x+1$ i $(y-2)^2=y^2-4y+4$, więc równanie $(x+1)^2+(y-2)^2=(2\sqrt{2})^2$ jest równoważne równaniu $(x^2+2x+1)+(y^2-4y+4)=(2\sqrt{2})^2$, a po podniesieniu prawej strony równania do kwadratu i przeniesieniu na lewą stronę otrzymujemy $x^2+2x+y^2-4y-3=0$. Jest to postać ogólna równania tego okręgu.

W *Zestawie wzorów* znajdujemy następujące równanie okręgu o środku w punkcie $S=(a,b)$ i promieniu r

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0, \text{ gdy } r^2=a^2+b^2-c>0.$$

Popatrzmy więc na następujące zadanie.

Zadanie 5.

Znajdź długość okręgu o równaniu $x^2-6x+y^2-8y=0$.

Rozwiązanie

Porównajmy równanie z zadania i postać ogólną równania okręgu.

$$x^2+y^2-\ 6x-\ 8y\qquad=0,$$

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0.$$

Współczynniki przy x są odpowiednio równe -6 oraz $-2a$, zatem $-2a=-6$, czyli $a=3$. Podobnie porównując współczynniki przy y dostajemy $-2b=-8$, stąd $b=4$.

Musimy jeszcze obliczyć wartość wyrażenia a^2+b^2-c i sprawdzić, że jest ona większa od zera. Oczywiście w naszym równaniu $c=0$ i wobec tego $3^2+4^2-0=25$. Zatem $r^2=25$, czyli $r=5$. Szukana długość okręgu jest więc równa $2\pi\cdot r=2\cdot\pi\cdot 5=10\pi$.

Uwaga. **Nie każde równanie, w którym występują obie zmienne *x, y* w drugiej potędze, jest równaniem okręgu** - w szczególności na przykład równanie $x^2+y^2+4x+4=0$.

Postępując analogicznie jak poprzednio obliczamy a i b. Otrzymujemy: $-2a=4$, czyli $a=-2$ oraz $-2b=0$, czyli $b=0$. Ponieważ $a^2+b^2-c=(-2)^2+0^2-4=0$, więc nie jest spełniony warunek $a^2+b^2-c>0$. Zatem to nie jest równanie okręgu.

Zastosujmy teraz umiejętności związane z równaniem okręgu do rozwiązania zadania 6, które pojawiło się na maturze.

Zadanie 6. (Egzamin maturalny – sierpień 2010, s. 11, zadanie 29)

Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie $S=(4,-2)$ i przechodzącego przez punkt $O=(0,0)$.

Rozwiązanie

W treści zadania nie jest wskazane, o jaką postać równania okręgu chodzi, mamy więc swobodę – będziemy szukać postaci kanonicznej. Ponieważ $a=4$, $b=-2$, więc możemy zapisać $(x-4)^2+(y+2)^2=r^2$. Aby wyznaczyć r^2 skorzystamy z faktu, że punkt O leży na okręgu, a więc jego współrzędne spełniają równanie tego okręgu

$$(0-4)^2+(0+2)^2=r^2,$$

$$4^2+2^2=r^2,$$

$$20=r^2.$$

Możemy już teraz napisać rozwiązanie: $(x-4)^2+(y+2)^2=20$.

Rozwiążemy kilka zadań, w których przeanalizujemy położenie okręgu w układzie współrzędnych, czy też względem prostej.

Zadanie 7.

Liczba punktów wspólnych okręgu o równaniu $(x-3)^2+(y+2)^2=9$ z osiami układu współrzędnych jest równa

A. 0 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 4

Rozwiązanie

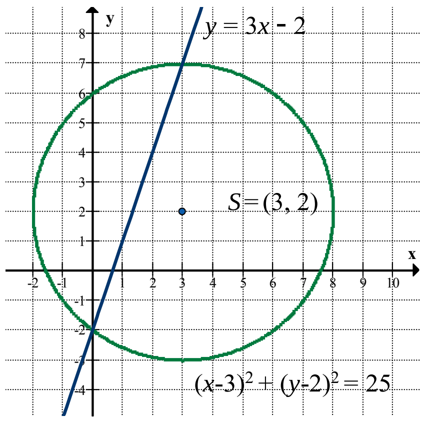
Zauważmy, że promień okręgu jest równy 3 (ponieważ $r^2=9$). Środek okręgu ma współrzędne $S=(3,-2)$, więc jego odległość od osi *Oy* jest równa 3, a odległość od osi *Ox* jest równa 2. Okrąg jest więc styczny do osi *Oy* (okrąg i oś *Oy* mają jeden punkt wspólny) i przecina oś *Ox* w dwóch punktach. Zaznaczamy odpowiedź **C**.

Zadanie 8.

Oblicz współrzędne punktów przecięcia prostej o równaniu $y=3x-2$ z okręgiem o równaniu o równaniu $(x-3)^2+(y-2)^2=25$.

Rozwiązanie

Sporządzenie rysunku nie jest konieczne. Rysunek został zamieszczony jedynie dla zilustrowania sytuacji.



Współrzędne każdego punktu przecięcia prostej i okręgu spełniają zarówno równanie okręgu jak i równanie prostej. Wystarczy zatem rozwiązać układ równań

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-2)^2=25\\ y=3x-2\end{cases}.$$

Podstawiając do pierwszego równania $3x-2$ w miejsce y otrzymujemy równanie

$$(x-3)^2+(3x-2-2)^2=25.$$

Rozwiązując je dostajemy kolejno

$$(x-3)^2+(3x-4)^2-25=0,$$

$$x^2-6x+9+9x^2-24x+16-25=0,$$

$$10x^2-30x=0,$$

$$10x(x-3)=0.$$

Stąd $x=0$ lub $x=3$ W ten sposób obliczyliśmy pierwsze współrzędne punktów przecięcia prostej i okręgu. Stąd i z drugiego równania obliczamy drugie współrzędne tych punktów. Gdy $x=0$, to wówczas $y=3\cdot 0-2=-2$, a gdy $x=3$, to $y=3\cdot 3-2=7$. Zatem prosta przecina okrąg w punktach $A=(0,-2)$ i $B=(3,7)$.

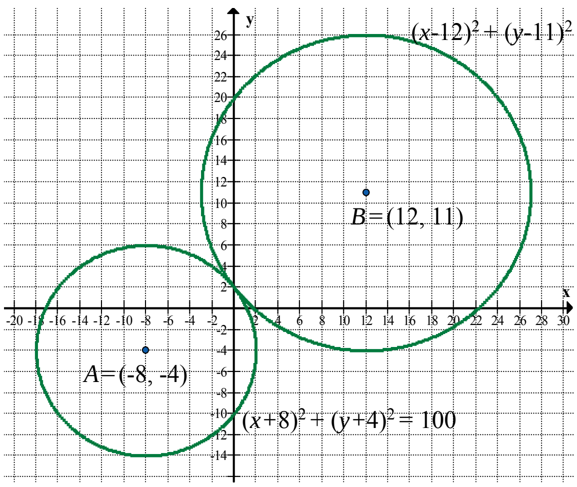
Odpowiedź: Współrzędne punktów przecięcia są równe $A=(0,-2)$ i $B=(3,7)$.

Zadanie 9.

Dane są okręgi o równaniach $(x+8)^2+(y+4)^2=100$, $(x-12)^2+(y-11)^2=225$. Oblicz współrzędne punktów wspólnych tych okręgów.

Rozwiązanie

Sporządźmy rysunek w układzie współrzędnych. Środek pierwszego okręgu to punkt $A=(-8,-4)$, a promień jest równy $r_1=10$. Środkiem drugiego okręgu jest punkt $B=(12,11)$, promień tego okręgu jest równy $r_2=15$.



Mimo, że możemy oba te okręgi narysować bardzo dokładnie, to jednak na podstawie rysunku nie możemy z całą pewnością podać liczby punktów wspólnych tych okręgów. Liczbę tę możemy określić rozwiązując układ równań. Jednocześnie obliczymy współrzędne tych punktów.

$$\begin{cases}(x+8)^2+(y+4)^2=100\\(x-12)^2+(y-11)^2=225\end{cases}.$$

Przekształcając równania otrzymujemy

$$\begin{cases}x^2+16x+64+y^2+8y+16=100\\x^2-24x+144+y^2-22y+121=225\end{cases},$$

$$\begin{cases}x^2+y^2+16x+8y=20\\x^2+y^2-24x-22y=-40\end{cases}.$$

Odejmując stronami od pierwszego z równań drugie dostajemy

$$16x+8y+24x+22y=20+40,$$

czyli

$$40x+30y=60.$$

Stąd $y=-\frac{4}{3}x+2$. Podstawiając teraz $-\frac{4}{3}x+2$ w miejsce y do równania $x^2+y^2+16x+8y=20$ dostajemy równanie z jedną niewiadomą x

$$x^2+\left(-\tfrac{4}{3}x+2\right)^2+16x+8\left(-\tfrac{4}{3}x+2\right)=20.$$

Przekształcamy to równanie

$$x^2+\tfrac{16}{9}x^2-\tfrac{16}{3}x+4+16x+-\tfrac{32}{3}x+16-20=0,$$

$$\tfrac{25}{9}x^2=0,$$

$$x=0.$$

Równanie ma jedno rozwiązanie $x=0$. Stąd $y=-\frac{4}{3}\cdot 0+2=2$. Oznacza, że dane okręgi mają tylko jeden punkt wspólny $M=(0,2)$.

XII. PLANIMETRIA – POLA I WŁASNOŚCI FIGUR

Planimetria jest obszernym działem matematyki. Powtórka nasza nie będzie systematycznym powtórzeniem tego działu, zajmiemy się wybranymi zadaniami, które zostały opublikowane przez CKE.

Na początek rozwiążemy kilka zadań, w których pojawia się pojęcie pola figury.

Zadanie 1. (Informator maturalny, s. 81, zadanie 34)

Pole kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu 4 cm jest równe

A. 64 cm^2 **B.** 32 cm^2 **C.** 16 cm^2 **D.** 8 cm^2

Rozwiązanie

Promień okręgu opisanego na kwadracie jest połową przekątnej tego kwadratu, więc przekątna kwadratu ma długość 8 cm. Ze wzoru $d = a\sqrt{2}$ na długość *d* przekątnej kwadratu o boku długości *a* możemy obliczyć długość boku kwadratu:

$$8 = a\sqrt{2},$$

stąd

$$a = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}.$$

Pole kwadratu jest więc równe

$$P = a^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 32 \text{ cm}^2.$$

Wybieramy poprawną odpowiedź – **B**.

Zadanie 2. (Informator maturalny, s. 81, zadanie 34)

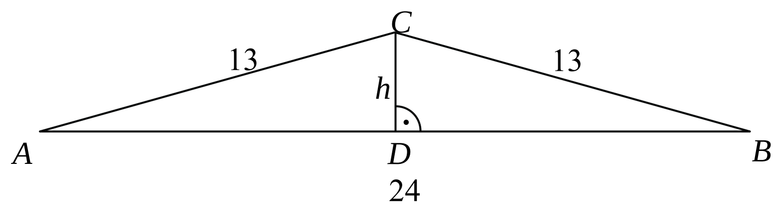
Oblicz pole trójkąta równoramiennego *ABC*, w którym $|AB| = 24$ i $|AC| = |BC| = 13$.

Rozwiązanie

Posłużymy się wzorem na pole trójkąta

$$P = \frac{1}{2}a \cdot h.$$

Za podstawę trójkąta możemy przyjąć dowolny jego bok. Cała trudność rozwiązania zadania sprowadzi się więc do obliczenia wysokości opuszczonej na wybraną przez nas podstawę Przyjmijmy za podstawę bok *AB*. Sporządźmy rysunek trójkąta i zaznaczmy na nim wysokość opuszczoną na ten bok.



Ponieważ trójkąt jest równoramienny, więc wysokość *CD* dzieli trójkąt *ABC* na dwa przystające trójkąty prostokątne. Zatem $|AD| = |DB| = 12$. Z twierdzenia Pitagorasa dla jednego z tych trójkątów, np. *ADC*, obliczamy wysokość *h*

$$12^2 + h^2 = 13^2,$$

$$144 + h^2 = 169,$$

$$h^2 = 25.$$

Stąd

$$h = 5.$$

Teraz obliczamy już pole trójkąta *ABC*

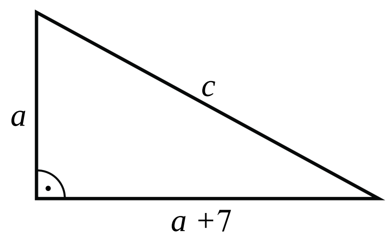
$$P = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 5 = 60.$$

Zadanie 3. (Próbny egzamin maturalny – listopad 2009, s. 18, zadanie 34)

Pole trójkąta prostokątnego jest równe $60\ \text{cm}^2$. Jedna przyprostokątna jest o 7 cm dłuższa od drugiej. Oblicz długość przeciwprostokątnej tego trójkąta.

Rozwiązanie

Tym razem podane mamy pole trójkąta prostokątnego oraz wiemy, że jedna z przyprostokątnych jest 7 cm dłuższa od drugiej. Oznaczmy długość krótszej przyprostokątnej przez *a*. Wtedy druga przyprostokątna ma długość $a + 7$. Oznaczmy również przez *c* długość przeciwprostokątnej. Sporządźmy rysunek tego trójkąta z przyjętymi oznaczeniami



Ponieważ trójkąt jest prostokątny, to jego pole jest równe

$$P = \frac{1}{2} a \cdot (a + 7).$$

Pole to jest równe 60 cm^2, więc dostajemy równanie

$$60 = \frac{1}{2} a \cdot (a + 7).$$

Mnożąc obie strony tego równania przez 2 otrzymujemy

$$120 = a \cdot (a + 7)$$

Pomnożenie obu stron równania przez 2 nie jest konieczne, jednak wygodniej będzie nam rozwiązywać równanie, w którym współczynniki będą całkowite.

Dalej mamy kolejno

$$120 = a^2 + 7a,$$

$$a^2 + 7a - 120 = 0.$$

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe z niewiadomą *a*. Obliczmy jego wyróżnik i pierwiastki

$$\Delta = 7^2 - 4\cdot 1\cdot\left(-120\right) = 49 + 480 = 529\,,\quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{529} = 23\,,$$

$$a = \frac{-7-23}{2\cdot 1} = -15 \text{ lub } a = \frac{-7+23}{2\cdot 1} = 8\,.$$

Pierwsze z rozwiązań jest liczbą ujemną, więc nie może być długością boku trójkąta, więc $a = 8$. Wtedy $a + 7 = 8 + 7 = 15$.

Teraz możemy już obliczyć długość przeciwprostokątnej trójkąta. Wykorzystamy twierdzenie Pitagorasa, z którego otrzymujemy

$$c^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289\,,$$

skąd

$$c = \sqrt{289} = 17\,.$$

Odpowiedź. Przeciwprostokątna trójkąta ma długość 17 cm.

Zadanie 4. (Informator maturalny, s. 46, zadanie 30)

Dany jest prostokąt o bokach *a* i *b* oraz prostokąt o bokach *c* i *d*. Długość boku *c* to 90% długości boku *a*. Długość boku *d* to 120% długości boku *b*. Oblicz, ile procent pola prostokąta o bokach *a* i *b* stanowi pole prostokąta o bokach *c* i *d*.

Rozwiązanie

Pole prostokąta o bokach długości *a* i *b* jest równe

$$P_1 = ab\,.$$

Pole prostokąta o bokach długości *c* i *d* jest równe

$$P_2 = cd\,.$$

Zapisujemy zależności między długościami boków prostokątów

$$c = 90\%a = \frac{90}{100}a = \frac{9}{10}a \text{ oraz } d = 120\%b = \frac{120}{100}b = \frac{12}{10}b\,.$$

Pole P_2 możemy więc zapisać w postaci

$$P_2 = \frac{9}{10}a\cdot\frac{12}{10}b = \frac{108}{100}ab = \frac{108}{100}P_1 = 108\%P_1$$

Odpowiedź. Pole prostokąta o bokach długości *c* i *d* stanowi 108% pola prostokąta o bokach długości *a* i *b*.

Jako ćwiczenie proponujemy rozwiązanie następującego zadania.

Zadanie 5. (Informator maturalny, s. 85, zadanie 70)

Liczby 6, 10, *c* są długościami boków trójkąta równoramiennego. Oblicz *c*.

Z koniecznością obliczenia długości jednego z boków trójkąta mamy do czynienia w zadaniu 6. Różnica w stosunku do zadań poprzednich polega na tym, że tym razem jest to trójkąt prostokątny.

Zadanie 6. (Informator maturalny, s. 85, zadanie 71)

Liczby 6, 10, c są długościami boków trójkąta prostokątnego. Oblicz c.

Rozwiązanie

Ponieważ trójkąt jest prostokątny, więc c może być długością jednej z przyprostokątnych albo długością przeciwprostokątnej. Oczywiście w tym pierwszym przypadku długość przeciwprostokątnej jest równa 10, bo **przeciwprostokątna jest dłuższa od każdej z przyprostokątnych**. Z twierdzenia Pitagorasa, uwzględniając obie te sytuacje, otrzymujemy

$$c^2+6^2=10^2 \text{ lub } 6^2+10^2=c^2 .$$

Stąd

$$c^2=10^2-6^2=64 \text{ lub } 136=c^2 ,$$

więc

$$c=8 \text{ lub } c=\sqrt{136}=2\sqrt{34} .$$

Odpowiedź. $c=8$ lub $c=2\sqrt{34}$.

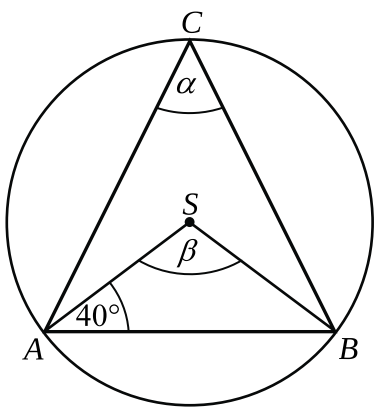
Przejdziemy teraz do zadań, w których należy obliczyć miary wskazanych kątów. Są to najczęściej **kąty w kole**.

Zadanie 7. (Informator maturalny, s. 22, zadanie 6)

Ostrokątny trójkąt równoramienny ABC o podstawie AB jest wpisany w okrąg o środku S, przy czym kąt SAB ma miarę $40°$. Oblicz miarę kąta CAB.

Rozwiązanie

Sporządźmy najpierw rysunek.



Trójkąt ABS jest równoramienny, gdyż AS i BS to promienie tego samego okręgu. Zatem

$$|\sphericalangle ABS|=|\sphericalangle BAS|=40° .$$

Możemy teraz obliczyć miarę trzeciego z kątów trójkąta *ABS*, bo suma miar wszystkich kątów trójkąta jest równa 180°.

$$|\sphericalangle ASB| = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 100^\circ \text{ czyli } \beta = 100^\circ.$$

Obliczamy następnie miarę kąta wpisanego *ACB*, który jest oparty na łuku *AB*, na którym oparty jest również kąt środkowy *ASB*

$$\alpha = \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}\cdot 100^\circ = 50^\circ.$$

Wykorzystamy teraz ponownie twierdzenie o sumie kątów wewnętrznych trójkąta oraz równość kątów przy podstawie trójkąta równoramiennego. Stąd obliczamy szukaną miarę kąta *CAB*

$$|\sphericalangle CAB| = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ.$$

Odpowiedź. $|\sphericalangle CAB| = 65^\circ$.

Jako ćwiczenie proponujemy rozwiązanie zadania 8.

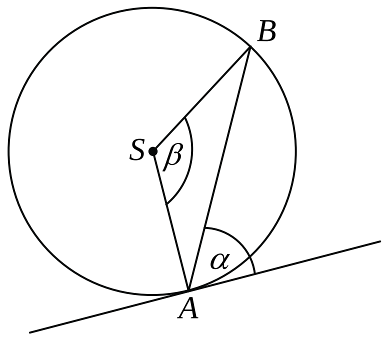
Zadanie 8. (Informator maturalny, s. 80, zadanie 31)

Kąt środkowy i kąt wpisany są oparte na tym samym łuku. Suma ich miar jest równa 180°. Jaka jest miara kąta środkowego?

A. 60° **B.** 90° **C.** 120° **D.** 135°

Zadanie 9. (Informator maturalny, s. 80, zadanie 30)

Kąt między cięciwą *AB* a styczną do okręgu w punkcie *A* (zobacz rysunek) ma miarę $\alpha = 62^\circ$. Wówczas



A. $\beta = 118^\circ$ **B.** $\beta = 124^\circ$ **C.** $\beta = 138^\circ$ **D.** $\beta = 152^\circ$

Rozwiązanie

Odciek *SA* jest prostopadły do stycznej do okręgu poprowadzonej przez punkt *A*. Zatem kąt ostry *SAB* jest równy $90^\circ - \alpha = 90^\circ - 62^\circ = 28^\circ$. Teraz wykorzystujemy fakt, że trójkąt *SAB* jest równoramienny, więc kąty *SAB* i *SBA* są równe. Stąd i tego, że suma kątów trójkąta jest równa 180°, obliczamy $\beta = 180^\circ - 2\cdot 28^\circ = 124^\circ$. Zatem poprawna odpowiedź to **B**.

Pytania o kąty występują również w zadaniach dotyczących wielokątów.

Zadanie 10. (Informator maturalny, s. 42, zadanie 19)

Różnica miar dwóch sąsiednich kątów wewnętrznych równoległoboku jest równa $30°$. Kąt rozwarty tego równoległoboku jest równy

A. $105°$ **B.** $115°$ **C.** $125°$ **D.** $135°$

Rozwiązanie

Oznaczmy kąt rozwarty równoległoboku przez α, a kat ostry przez β. Możemy sporządzić rysunek,

choć nie jest to niezbędne, o ile wiemy, że **miary kolejnych dwóch kątów równoległoboku dają w sumie** $180°$, albo że **suma miar wszystkich kątów równoległoboku jest równa** $360°$ i **przeciwlegle kąty równoległoboku są równe**. Zapisujemy równości

$$\alpha+\beta=180° \text{ oraz } \alpha-\beta=30°.$$

Po dodaniu stronami tych równości dostajemy $2\alpha = 210°$, więc $\alpha = 105°$. Zatem poprawną odpowiedzią jest **A**.

Możemy również próbować wyeliminować błędne odpowiedzi rozumując następująco. Jeśli kąt rozwarty jest równy $105°$, to kąt ostry $75°$, bo razem dają $180°$. Różnica między tymi katami jest równa $105° - 75° = 30°$, więc odpowiedź A jest poprawna. Gdyby otrzymana różnica była inna niż $30°$, to rozumowanie powtarzamy dla kolejnej proponowanej odpowiedzi, aż trafimy na poprawną.

Podobnym zadaniem jest zadanie 11, które proponujemy jako ćwiczenie.

Zadanie 11. (Informator maturalny, s. 80, zadanie 32)

Różnica miar kątów wewnętrznych przy ramieniu trapezu równoramiennego, który nie jest równoległobokiem, jest równa 40°. Miara kąta przy krótszej podstawie tego trapezu jest równa

A. $120°$ **B.** $110°$ **C.** $80°$ **D.** $70°$

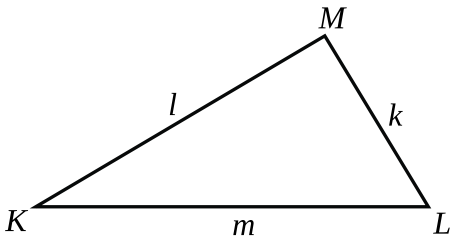
XIII. PLANIMETRIA – PRZYSTAWANIE I PODOBIEŃSTWO

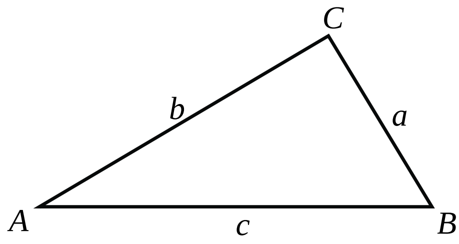
W potocznym rozumieniu figury przystające to figury „takie same", a więc takie, które możemy na siebie „dokładnie nałożyć". W przypadku trójkątów mówimy o cechach przystawania trójkątów. Są one podane w *Zestawie wzorów* na stronie 7.

Rozważmy trójkąty *KLM* i *ABC*.

Cecha b-b-b (bok-bok-bok) przystawania trójkątów.

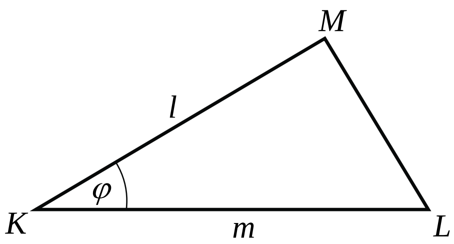
Jeżeli $k = a$ i $l = b$ oraz $m = c$, to wówczas trójkąty *KLM* i *ABC* są przystające, co zapisujemy symbolicznie $\Delta KLM \equiv \Delta ABC$. Cechę ilustruje pierwszy rysunek.

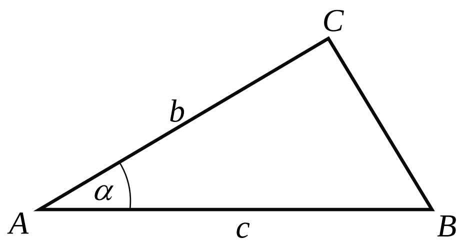




Cecha b-k-b (bok-kąt-bok) przystawania trójkątów.

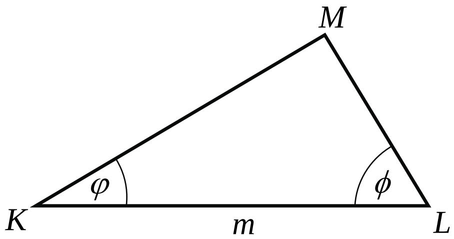
Jeżeli $l = b$ i $m = c$ oraz $\varphi = \alpha$, to wówczas trójkąty *KLM* i *ABC* są przystające. Cechę ilustruje drugi rysunek.

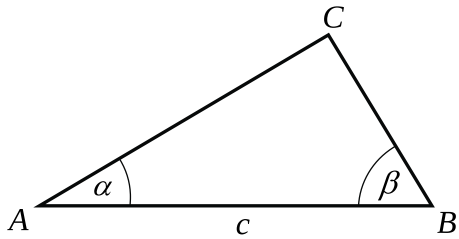




Cecha k-b-k (kąt-bok-kąt) przystawania trójkątów.

Jeżeli $\varphi = \alpha$ i $m = c$ oraz $\phi = \beta$, to wówczas trójkąty *KLM* i *ABC* są przystające. Cechę ilustruje trzeci rysunek.

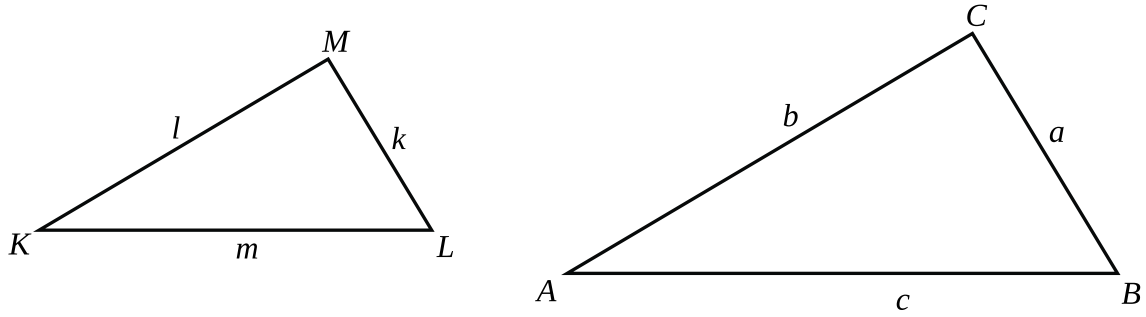




Figury nazywamy podobnymi, jeżeli jedna z nich jest „miniaturą" bądź „powiększeniem" drugiej w pewnej skali tzn. jest proporcjonalnie zmniejszona lub zwiększona - mówimy w tym miejscu o skali podobieństwa. Jeżeli dany wielokąt zwiększymy w taki sposób, że wszystkie jego kąty wewnętrzne zachowamy, a długości boków zwiększymy dwukrotnie, to skala podobieństwa będzie równa 2. Badając trójkąty korzystamy z cech podobieństwa trójkątów (patrz *Zestaw wzorów*, strona 7).

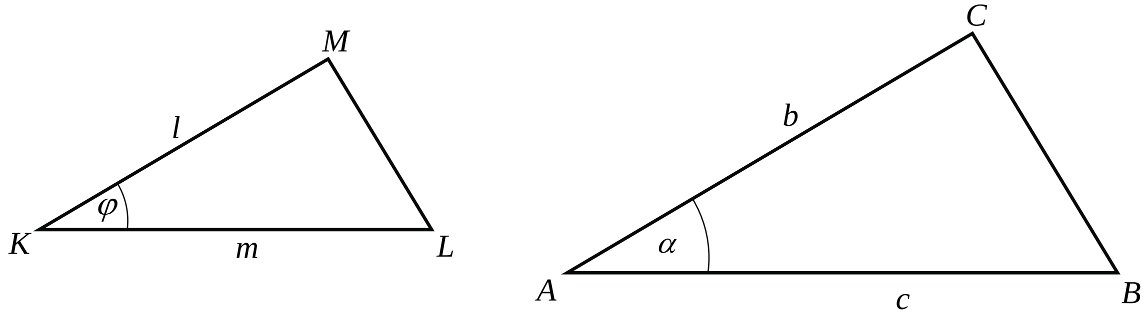
Cecha B-B-B (bok-bok-bok) podobieństwa trójkątów.

Jeżeli $\frac{k}{a}=\frac{l}{b}=\frac{m}{c}$, to wówczas trójkąty *KLM* i *ABC* są podobne, co zapisujemy symbolicznie $\Delta KLM \sim \Delta ABC$. Cechę ilustruje pierwszy rysunek.



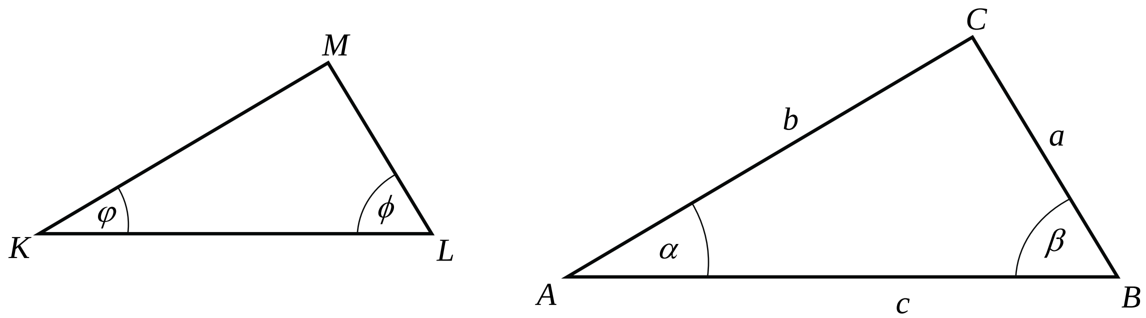
Cecha B-K-B (bok-kąt-bok) podobieństwa trójkątów.

Jeżeli $\frac{l}{b}=\frac{m}{c}$ i $\varphi=\alpha$, to wówczas trójkąty *KLM* i *ABC* są podobne. Cechę ilustruje drugi rysunek.



Cecha K-K (kąt-kąt) podobieństwa trójkątów.

Jeżeli $\varphi=\alpha$ i $\phi=\beta$, to wówczas trójkąty *KLM* i *ABC* są podobne. Cechę ilustruje trzeci rysunek.



Zauważmy, że skoro dwa kąty jednego trójkąta są równe dwóm kątom w drugim trójkącie, to również trzecie kąty w obu tych trójkątach muszą być równe.

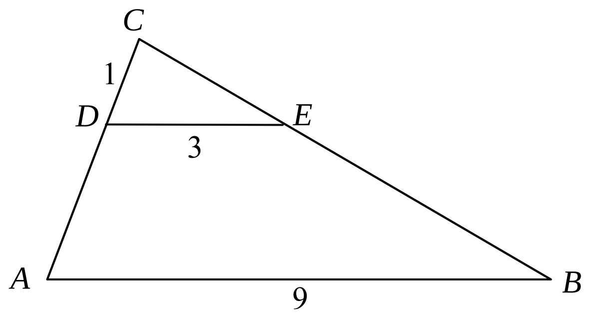
Uwaga. Figury przystające są oczywiście figurami podobnymi, a skala podobieństwa jest wówczas równa 1.

Stosunek pól dwóch figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa – tę własność łatwo zilustrować na przykładzie kwadratu. Rozważmy na przykład kwadrat o boku długości 2. Jego pole jest równe 4. Weźmy teraz kwadrat o boku długości 6, wówczas skala podobieństwa, równa stosunkowi długości boków kwadratu, jest równa 3 (bo $6 = 3 \cdot 2$). Ale pole powierzchni drugiego kwadratu jest oczywiście równe 36, czyli $3^2 \cdot 4$.

Zacznijmy od rozwiązania problemów, które już pojawiły się na maturze.

Zadanie 1. (Egzamin maturalny – maj 2010, s. 6, zadanie 17)

Odcinki *AB* i *DE* są równoległe. Długości odcinków *CD*, *DE*, i *AB* są odpowiednio równe 1, 3 i 9. Długość odcinka *AD* jest równa



A. 2 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 6

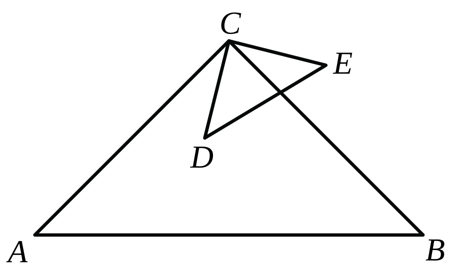
Rozwiązanie

Ponieważ odcinki *AB* i *DE* są równoległe, to kąty *ABC* i *DEC* (utworzone przez dwie proste równoległe przecięte trzecią) są równe. Kąt przy wierzchołku *C* w trójkątach *ABC* i *DEC* jest ten sam. Stąd wynika, że trójkąty *ABC* i *DEC* są podobne (na mocy cechy K-K). Zatem ich odpowiednie boki są proporcjonalne $\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|DE|}$, czyli $\frac{x+1}{1} = \frac{9}{3}$, gdzie $x = |AD|$.

Stąd $x + 1 = 3$, więc $x = 2$. Poprawna odpowiedź to **A**.

Zadanie 2. (Egzamin maturalny – maj 2010, s. 11, zadanie 28)

Trójkąty prostokątne równoramienne *ABC* i *CDE* są położone tak, jak na poniższym rysunku (w obu trójkątach kąt przy wierzchołku *C* jest prosty). Wykaż, że $|AD| = |BE|$.



Rozwiązanie

Oznaczmy kąt *ACD* przez α, kąt *DCB* przez β oraz kąt *BCE* przez γ. Ponieważ $|\angle ACD| + |\angle DCB| = |\angle ACB|$, więc mamy $\alpha + \beta = 90^\circ$. Podobnie $\beta + \gamma = 90^\circ$, bo

$|\angle DCB|+|\angle BCE|=|\angle DCE|$. Z równości $\alpha+\beta=90^\circ=\beta+\gamma$ wynika, że $\alpha=\gamma$. Oznaczmy $|AC|=x=|CB|$, $|CD|=y=|CE|$. W trójkącie *ACD* boki mają odpowiednio długość *x*, *y*, a kąt między nimi ma miarę α. Także w trójkącie *BCE* boki mają odpowiednio długość *x*, *y*, a kąt między nimi ma miarę γ, równą α. Na podstawie cechy *bkb* trójkąty *ACD* i *BCE* są przystające. Stąd wynika równość $|AD|=|BE|$. Co kończy dowód.

A teraz przyjrzyjmy się zadaniu, w którym musimy „sprawdzać" poszczególne odpowiedzi.

Zadanie 3.

Trójkąty *ABC* i *DEF* są podobne. Boki trójkąta *ABC* mają długości 3, 5, 7. Długości boków trójkąta *DEF* mogą być równe

A. $6, 8, 10$ **B.** $6, 10, 16$ **C.** $9, 15, 21$ **D.** $2, 4, 6$

Rozwiązanie

Spójrzmy na odpowiedź **A**. Boki trójkąta *DEF* mają długość o 3 większą niż boki w trójkącie *ABC.* Stosunek długości boków najkrótszych to 2, tymczasem stosunek długości boków „średnich" jest równy $\frac{8}{5}$. Zatem te trójkąty nie są podobne. Patrzymy na odpowiedź **B**. **Stosunek najkrótszych boków w tych trójkątach jest równy** 2**, a stosunek najdłuższych** $\frac{16}{7}$**, więc te trójkąty nie są podobne.** Sprawdźmy teraz odpowiedź **C**. Każdy z boków trójkąta *DEF* jest trzy razy dłuższy niż odpowiedni bok w trójkącie *ABC*. Oznacza to, że trójkąty o takich bokach są podobne, a ich skala podobieństwa jest równa 3 (albo $\frac{1}{3}$). Zaznaczamy odpowiedź **C** .

Problem porównywania pól figur podobnych ilustruje poniższe zadanie.

Zadanie 4

Stosunek pól dwóch wielokątów podobnych jest równy 9. Jeżeli obwód większego z nich jest równy 36, to obwód mniejszego jest równy

A. 4 **B.** 108 **C.** 324 **D.** 12

Rozwiązanie

Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali ich podobieństwa. Zatem skala podobieństwa $k=\sqrt{9}=3$. Długości odcinków, a także ich sumy (w tym obwód) zmieniają się w skali *k* (nie zaś k^2 jak pole, czy k^3 jak objętość figur podobnych). Stąd stosunek obwodu większej figury, czyli 36, do obwodu mniejszej z nich jest równy 3. Zatem szukany obwód jest równy 12. Zaznaczamy odpowiedź **D**.

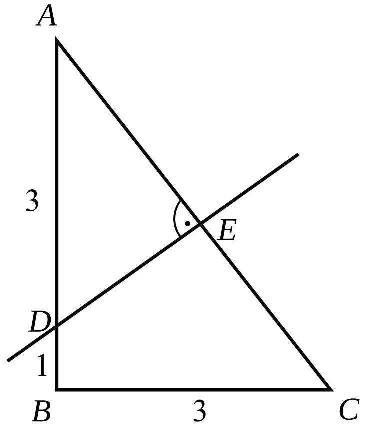
Zadanie 5.

W trójkącie prostokątnym *ABC* przyprostokątna *BC* ma długość 3. Prosta prostopadła do przeciwprostokątnej przecina przyprostokątną *AB* w takim punkcie *D*, że $|AD| = 3$ i $|BD| = 1$.

Oblicz długości odcinków, na jakie ta prosta dzieli przeciwprostokątną.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez *D* punkt wspólny prostej i boku *AB*, natomiast przez *E* punkt wspólny tej prostej z bokiem *AC*, tak jak na rysunku.



Ponieważ $|AB| = 4$ (3+1=4), więc z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy, że

$$3^2 + 4^2 = 25 = |AC|^2.$$

Stąd $|AC| = 5$.

Trójkąt *ADE* **jest podobny do trójkąta** *ABC* **– oba są trójkątami prostokątnymi i mają wspólny kąt przy wierzchołku** *A* (podobieństwo na mocy cechy „kąt – kąt”). Skala podobieństwa jest równa stosunkowi długości przeciwprostokątnych, czyli $\frac{5}{3}$.

Podobnie wyraża się stosunek długości przyprostokątnych obu trójkątów, leżących przy wierzchołku *A*. Zatem

$$\frac{4}{|AE|} = \frac{5}{3}.$$

Stąd

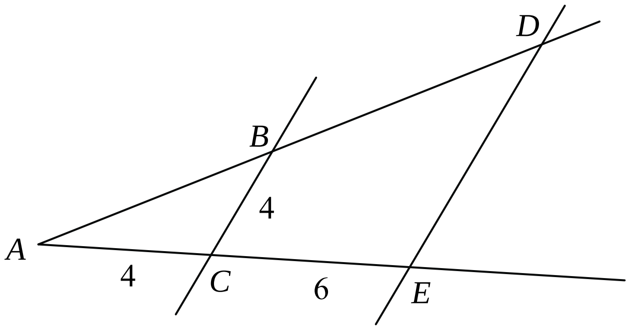
$$5 \cdot |AE| = 4 \cdot 3, \text{ czyli } |AE| = \frac{12}{5} = 2{,}4.$$

Możemy więc sformułować odpowiedź: prosta dzieli przeciwprostokątną na odcinki o długościach 2,4 oraz 2,6 (ponieważ $5 - 2{,}4 = 2{,}6$).

Wśród zadań, jakie Centralna Komisja Egzaminacyjna zamieściła w *Informatorze o egzaminie maturalnym*, znajdują się trzy poniższe zadania.

Zadanie 6. (Informator maturalny, s. 80, zadanie 33)

Odcinki *BC* i *DE* są równoległe. Długości odcinków *AC*, *CE* i *BC* są podane na rysunku. Długość odcinka *DE* jest równa



A. 6 **B.** 8 **C.** 10 **D.** 12

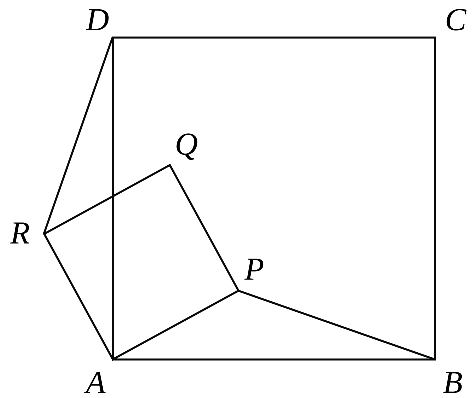
Rozwiązanie

Z podobieństwa trójkątów *ABC* i *ADE* mamy $\frac{|DE|}{|BC|}=\frac{|AE|}{|AC|}$, czyli $\frac{|DE|}{4}=\frac{4+6}{4}$.

Stąd $|DE|=\frac{4\cdot 10}{4}=10$, co oznacza, że poprawna odpowiedź to **C**.

Zadanie 7. (Informator maturalny, s.91, zadanie 93)

Czworokąty *ABCD* i *APQR* są kwadratami (zob. rysunek). Udowodnij, że $|BP|=|DR|$.



Rozwiązanie

Analogicznie jak w zadaniu 2, oznaczmy kąt *BAP* przez α, kąt *PAD* przez β oraz kąt *DAR* przez γ. Wtedy, ponieważ $|\sphericalangle BAP|+|\sphericalangle PAD|=|\sphericalangle BAD|$, mamy $\alpha+\beta=90°$.

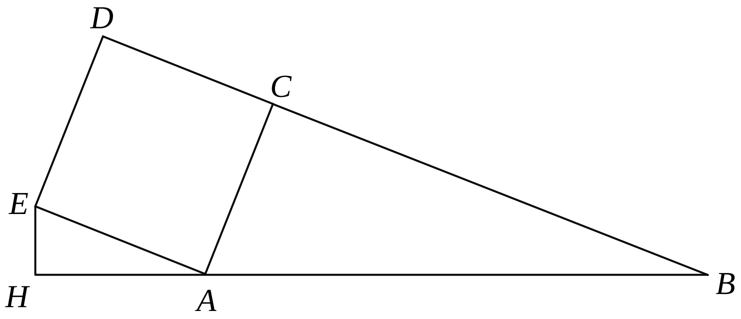
Podobnie, ponieważ $|\sphericalangle PAD|+|\sphericalangle DAR|=|\sphericalangle PAR|$, więc $\beta+\gamma=90°$.

Z równości $\alpha+\beta=90°=\beta+\gamma$ wynika, że $\alpha=\gamma$.

Oznaczmy $|AB|=x=|AD|$, $|AP|=y=|AR|$. W trójkącie *BAP* boki mają odpowiednio długość *x*, *y*, a kąt między nimi ma miarę α. Także w trójkącie *DAR* boki mają odpowiednio długość *x*, *y*, a kąt między nimi ma miarę γ, równą α. Na podstawie cechy *bkb* trójkąty *BAP* i *DAR* są przystające – stąd równość $|BP|=|DR|$.

Zadanie 8. (Informator maturalny, zadanie 104)

Na zewnątrz trójkąta prostokątnego ABC, w którym $|\angle ACB| = 90^\circ$ oraz $|AC| = 5$, $|BC| = 12$ zbudowano kwadrat $ACDE$ (zob. rysunek). Punkt H leży na prostej AB i kąt $|\angle EHA| = 90^\circ$. Oblicz pole trójkąta HAE.



Rozwiązanie

Ponieważ $BC \parallel EA$ więc $|\angle CBA| = |\angle EAH|$. Stąd wynika, na mocy cechy *kk*, że trójkąty CBA i HAE są podobne. **Skala podobieństwa jest równa stosunkowi długości odpowiednich boków, na przykład przeciwprostokątnych.** Długość odcinka AB wyznaczymy z twierdzenia Pitagorasa:

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2,$$

$$5^2 + 12^2 = |AB|^2,$$

$$169 = |AB|^2,$$

$$|AB| = \sqrt{169} = 13.$$

Skala podobieństwa jest więc równa $\dfrac{|AB|}{|AE|} = \dfrac{13}{5}$. Ponieważ **stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa**, więc

$$\frac{30}{P_{HAE}} = \left(\frac{13}{5}\right)^2.$$

Stąd

$$P_{HAE} = \frac{30}{\frac{169}{25}} = \frac{30 \cdot 25}{169} = \frac{750}{169}.$$

XIV. GRANIASTOSŁUPY

Zacznijmy od rozwiązania zadań z matury.

Zadanie 1. (Egzamin maturalny – maj 2010, s. 8, zadanie 23)

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o wymiarach 5 × 3 × 4 jest równe

A. 94 **B.** 60 **C.** 47 **D.** 20

Rozwiązanie

Najszybszym rozwiązaniem tego zadania będzie podstawienie danych do wzoru $P = 2(ab + bc + ac)$ podanego w *Zestawie* na stronie 12. Pole jest równe $P = 2(5 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4) = 2 \cdot 47 = 94$. Zaznaczamy odpowiedź **A**. Zrezygnowaliśmy tutaj z rysunku, a także z obliczania pól poszczególnych ścian, bo trwałoby to zapewne nieco dłużej niż podstawienie do wzoru.

Zadanie 2. (Informator maturalny, s. 82, zadanie 47)

Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe 24 cm^2. Objętość tego sześcianu jest równa

A. 8 cm^3 **B.** 16 cm^3 **C.** 27 cm^3 **D.** 64 cm^3

Rozwiązanie

Ponownie skorzystamy ze wzoru na pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu, w którym wszystkie krawędzie są równe *a*. Wtedy wzór ten przybierze postać

$$P = 2\left(a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a\right) = 6a^2 .$$

Z treści wynika, że $6a^2 = 24$, czyli $a^2 = 4$. Stąd $a = 2$. Objętość jest więc równa $a^3 = 8$. Zaznaczamy odpowiedź **A**.

Zadanie 3. (Egzamin maturalny – sierpień 2010, s.8, zadanie 24)

Graniastosłup ma 15 krawędzi. Ile wierzchołków ma ten graniastosłup?

A. 10 **B.** 5 **C.** 15 **D.** 30

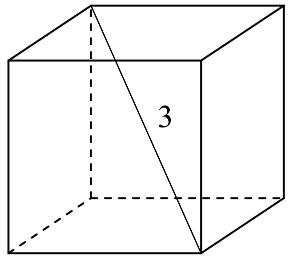
Rozwiązanie

Podstawami graniastosłupów są dwa dowolne, ale przystające *n*-kąty. Każdy wierzchołek jednej podstawy jest połączony z dokładnie jednym wierzchołkiem drugiej podstawy krawędzią boczną – tych bocznych krawędzi jest więc *n*. Liczba wszystkich krawędzi graniastosłupa jest równa sumie *n* krawędzi jednej podstawy, *n* krawędzi drugiej podstawy oraz *n* krawędzi bocznych, czyli razem $3n$. Ponieważ w naszym przypadku jest 15 krawędzi, więc podstawą jest pięciokąt. Liczba wierzchołków jest równa 10 (5 na jednej podstawie i 5 na drugiej). Zaznaczamy poprawną odpowiedź **A**.

Teraz przejdziemy do zadań, w których **istotną rolę odgrywa rysunek**. Niekiedy jest on zamieszczony w treści zadania, a niekiedy sporządzamy go sami. W *Informatorze* jako pierwsze zadanie ze stereometrii jest proponowane następujące:

Zadanie 4. (Informator maturalny, s. 82, zadanie 46)

Przekątna sześcianu ma długość 3. Pole powierzchni całkowitej tego sześcianu jest równe



A. 54 **B.** 36 **C.** 18 **D.** 12

Rozwiązanie

Zauważmy, że przekątna sześcianu jest przeciwprostokątną w trójkącie, którego pozostałymi bokami są krawędź boczna (oznaczmy jej długość przez *a*) i przekątna podstawy (o długości $a\sqrt{2}$). Możemy zapisać twierdzenie Pitagorasa $a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 = 3^2$. Wtedy

$$a^2 + 2a^2 = 9,$$

$$3a^2 = 9,$$

$$a^2 = 3.$$

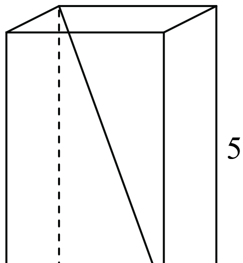
Powierzchnia całkowita sześcianu to suma sześciu pól kwadratów o boku *a*, czyli $6 \cdot a^2 = 6 \cdot 3 = 18$. Zaznaczamy odpowiedź **C**.

Zauważmy, że nie musieliśmy wyznaczać długości krawędzi sześcianu *a* – wystarczyło znać wartość a^2.

Podobne umiejętności bada także poniższe zadanie.

Zadanie 5. (Informator maturalny, s.83, zadanie 48)

Przekątna prostopadłościanu o wymiarach 2 × 3 × 5 ma długość



A. $\sqrt{13}$ **B.** $\sqrt{29}$ **C.** $\sqrt{34}$ **D.** $\sqrt{38}$

Rozwiązanie

Oznaczmy szukaną długość przekątnej przez *d*. Ta przekątna jest przeciwprostokątną w trójkącie, którego jedną z przyprostokątnych jest krawędź boczna długości 5, a drugą jest przekątna podstawy o długości $\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$. Zapiszmy twierdzenie Pitagorasa $5^2+\left(\sqrt{13}\right)^2=d^2$, stąd $d^2=25+13=38$, czyli $d=\sqrt{38}$. Zaznaczamy **D**.

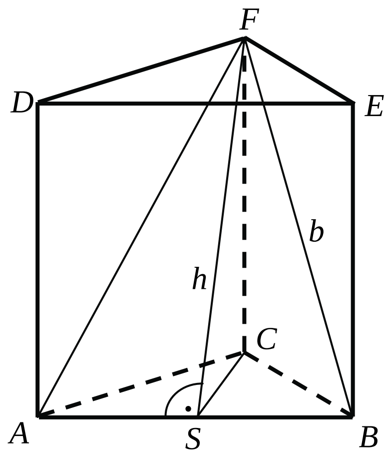
Twierdzenie Pitagorasa będzie podstawą rozwiązania także poniższego zadania maturalnego.

Zadanie 6. (Egzamin maturalny – sierpień 2010, s.14, zadanie 33)

Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny *ABCDEF* o podstawach *ABC* i *DEF* i krawędziach bocznych *AD, BE, CF*. Oblicz pole trójkąta *ABF* wiedząc, że $|AB|=10$ i $|CF|=11$. Narysuj ten graniastosłup i zaznacz na nim trójkąt *ABF*.

Rozwiązanie

Zacznijmy od rysunku.



Aby obliczyć szukane pole brakuje nam długości wysokości *h*. Wysokość ta jest prostopadła do podstawy *AB*, ale jest ona jednocześnie przeciwprostokątną w trójkącie *FCS*.

Graniastosłup jest trójkątny i prawidłowy, więc jego podstawą jest trójkąt równoboczny, jego wysokość *CS* ma więc długość $|CS|=\frac{10\sqrt{3}}{2}$. Możemy teraz zapisać twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta *FCS*: $|CS|^2+|CF|^2=|FS|^2$, czyli $\left(\frac{10\sqrt{3}}{2}\right)^2+11^2=h^2$. Stąd

$$h^2=\frac{100\cdot 3}{4}+121=196.$$

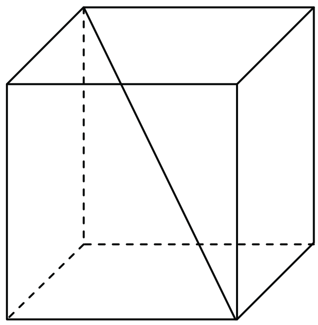
Pole trójkąta *ABF* jest równe

$$P=\frac{1}{2}|AB|\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot\sqrt{196}=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 14=70.$$

Do tej pory, rozwiązując zadania, udało nam się unikać wykorzystania trygonometrii. Przyszedł czas żeby to zmienić. Zaczniemy od prostego zadania zamieszczonego w *Informatorze*.

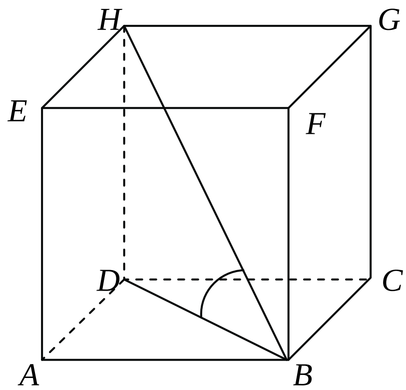
Zadanie 7. (Informator maturalny, s. 88, zadanie 92)

Oblicz sinus kąta między przekątną sześcianu a jego płaszczyzną podstawy.



Rozwiązanie

W treści zadania pojawił się rysunek zamieszczony wyżej – bez oznaczeń. **Wprowadzimy oznaczenia. W szczególności oznaczmy wierzchołki sześcianu, co pozwoli nam na komentowanie poszczególnych operacji.**



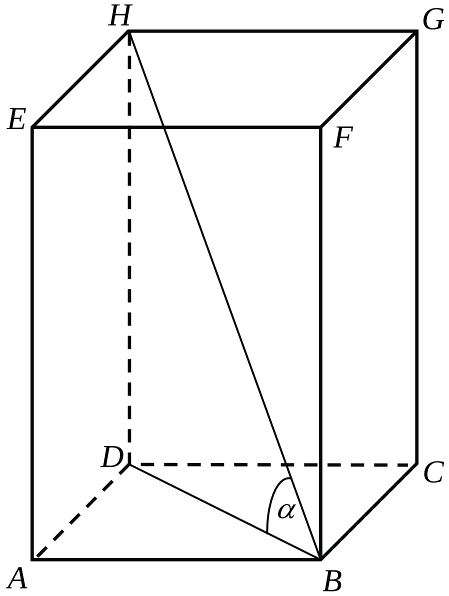
Aby zaznaczyć kąt, którego szukamy musimy naszkicować odcinek *BD* – **kąt między przekątną sześcianu a jego podstawą to kąt, jaki przekątna sześcianu tworzy z przekątną podstawy** (kąt w trójkącie *HBD)*. Przekątna sześcianu o krawędzi długości *a*, ma długość $a\sqrt{3}$ - wynika to w szczególności z zastosowania twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *HBD*. Zatem wartość sinusa dla kąta *HBD* jest równa $\sin|\sphericalangle HBD| = \frac{|DH|}{|BH|} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Zadanie 8.

Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat o boku długości 2. Oblicz objętość prostopadłościanu, jeżeli cosinus kąta, jaki przekątna prostopadłościanu tworzy z płaszczyzną podstawy jest równy $\frac{1}{3}$.

Rozwiązanie

Zaczniemy oczywiście od naszkicowania rysunku.



Zaznaczony na rysunku kąt α to kąt nachylenia przekątnej prostopadłościanu do płaszczyzny podstawy. Trójkąt *BHD* jest prostokątny, więc

$$\cos\alpha = \frac{|BD|}{|BH|}.$$

Z treści zadania wiemy, że $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, więc otrzymujemy $\frac{|BD|}{|BH|} = \frac{1}{3}$. Stąd $|BH| = 3|BD|$.

Ponieważ *BD* jest przekątną kwadratu *ABCD* o boku długości 2, więc $|BD| = |AB| \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

Możemy więc obliczyć długość przekątnej $|BH| = 3|BD| = 3 \cdot 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *DBH* obliczymy długość wysokości *DH*:

$$\left(2\sqrt{2}\right)^2 + |DH|^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2,$$

$$|DH|^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 72 - 8 = 64,$$

Stąd $|DH| = 8$. Zatem objętość prostopadłościanu jest równa $V = P_P \cdot H = 2^2 \cdot 8 = 32$.

XV. OSTROSŁUPY

Zacznijmy od rozwiązania zadania z matury.

Zadanie 1. (Egzamin maturalny – maj 2010, s. 8, zadanie 24)

Ostrosłup ma 18 wierzchołków. Liczba wszystkich krawędzi tego ostrosłupa jest równa

A. 11 **B.** 18 **C.** 27 **D.** 34

Rozwiązanie

Podstawą ostrosłupa jest n-kąt, który ma n boków, będących jednocześnie także krawędziami ostrosłupa. Każdy wierzchołek podstawy jest połączony krawędzią boczną z wierzchołkiem ostrosłupa – tych krawędzi jest także n. Zatem liczba wszystkich krawędzi ostrosłupa jest równa sumie n krawędzi podstawy oraz n krawędzi bocznych, czyli $2n$. Ponieważ w naszym przypadku jest 18 wierzchołków, z których jeden to wierzchołek ostrosłupa, a pozostałe 17 to wierzchołki wielokąta w podstawie, więc liczba wszystkich krawędzi jest równa $2 \cdot 17 = 34$. Zaznaczamy odpowiedź **D**.

Zadanie 2.

Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 3. Jego wysokość jest cztery razy dłuższa niż krawędź podstawy. Oblicz długość krawędzi podstawy.

Rozwiązanie

Możemy to zadanie rozwiązać bez szkicowania rysunku. Z *Zestawu wzorów* odczytujemy, że objętość ostrosłupa wyraża się wzorem $V = \frac{1}{3} P_P \cdot H$. Przyjmijmy, że krawędź podstawy ma długość a. **Podstawą jest trójkąt równoboczny, bo ostrosłup jest prawidłowy trójkątny.** Wtedy $P_P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ oraz $H = 4a$ - wstawiając te wyrażenia do wzoru na objętość, która jest równa 3 otrzymujemy $3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 4a$. Stąd $3 = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$, czyli $a^3 = 3\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}\right)^3$. Zatem $a = \sqrt{3}$.

Zadanie 3.

Wysokość ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 2. Oblicz długość krawędzi podstawy ostrosłupa, jeżeli stosunek powierzchni bocznej ostrosłupa do pola powierzchni podstawy jest równy 2.

Rozwiązanie

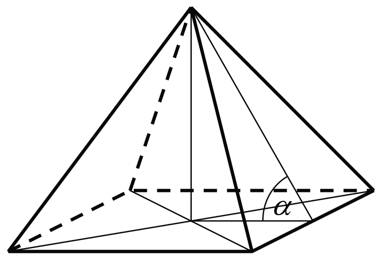
Także tym razem poradzimy sobie bez rysunku. Przyjmijmy, że krawędź podstawy, którą jest **kwadrat (bo ostrosłup jest prawidłowy)**, ma długość a. Wtedy pole podstawy jest równe $P_P = a^2$, a pole powierzchni bocznej składającej się z czterech trójkątów opisuje wzór

$P_b = 4\left(\frac{1}{2}a \cdot h\right)$, gdzie *h* jest wysokością ściany bocznej. Ponieważ wysokość *h* ma długość 2 oraz $\frac{P_b}{P_P} = 2$, więc otrzymujemy równość $\frac{4\left(\frac{1}{2}a \cdot 2\right)}{a^2} = 2$. Stąd $\frac{4a}{a^2} = 2$, czyli $a = 2$.

Przejdźmy teraz do zadań, w których pierwszym etapem rozwiązania będzie naszkicowanie rysunku lub zaznaczenie na nim odpowiednich wielkości.

Zadanie 4.

Objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 12, a pole powierzchni jego podstawy jest równe 9. Tangens kąta α nachylenia wysokości ściany bocznej do płaszczyzny podstawy jest równy



A. 4 **B.** $\frac{8}{3}$ **C.** 28 **D.** $\frac{3}{8}$

Rozwiązanie

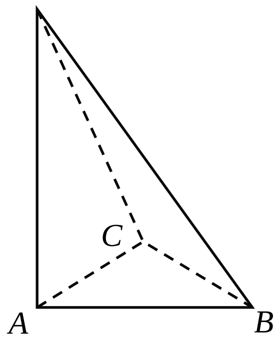
Oczywiście długość krawędzi podstawy jest równa 3 (pole kwadratu, który jest podstawą ostrosłupa jest równe 9). Ponieważ objętość wyraża się wzorem $V = \frac{1}{3}P_P \cdot H$, więc przy naszych danych otrzymujemy $12 = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot H$, stąd $H = 4$. Zatem $\mathrm{tg}\alpha = \frac{H}{\frac{1}{2}a} = \frac{4}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}$.

Zaznaczamy odpowiedź **B**.

Podczas ostatniej sesji wiosennej egzaminu maturalnego zdający rozwiązywali poniższe zadanie.

Zadanie 5. (Egzamin maturalny – maj 2010, s. 14, zadanie 32)

Podstawą ostrosłupa *ABCD* jest trójkąt *ABC*. Krawędź *AD* jest wysokością ostrosłupa (zobacz rysunek). Oblicz objętość ostrosłupa *ABCD*, jeśli wiadomo, że $|AD| = 12$, $|BC| = 6$, $|BD| = |CD| = 13$.



Rozwiązanie

Zwróćmy na początku uwagę, że **krawędź *AD* jest wysokością ostrosłupa, czyli jest prostopadła do podstawy – tym samym jest prostopadła do każdego odcinka leżącego w płaszczyźnie podstawy**, czyli także do odcinków *AB* i *AC*. Trójkąty *CAD* i *BAD* są wobec powyższego trójkątami prostokątnymi. Ponieważ mają równe przeciwprostokątne i wspólną jedną z przyprostokątnych, są więc trójkątami przystającymi. Stąd $|AB| = |AC|$. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $|AB|^2 + |AD|^2 = |BD|^2$. Po podstawieniu danych otrzymujemy $|AB|^2 + 12^2 = 13^2$, stąd $|AB|^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$. Podstawą ostrosłupa jest więc trójkąt równoramienny o bokach długości 5, 5, 6. **Moglibyśmy obliczyć długość wysokości trójkąta *ABC* poprowadzonej na bok *BC* korzystając ponownie z twierdzenia Pitagorasa, ale ze względu na „ładne" dane wykorzystamy wzór Herona, który podany jest w** *Zestawie*: $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie *a, b, c* są długościami boków trójkąta, a *p* jest połową obwodu trójkąta. Wtedy mamy

$$P = \sqrt{8 \cdot (8-5) \cdot (8-5) \cdot (8-6)} = \sqrt{8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{16 \cdot 9} = 12 .$$

Objętość ostrosłupa jest równa

$$V = \frac{1}{3} P \cdot |AD| = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 12 = 48 .$$

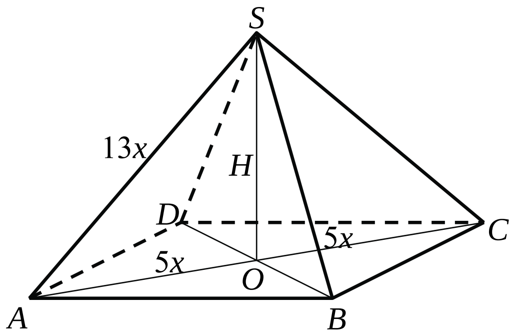
Rozwiążemy teraz dwa zadania z Informatora.

Zadanie 6. (Informator maturalny, s. 90, zadanie 101)

Podstawą ostrosłupa prawidłowego czworokątnego *ABCDS* jest kwadrat *ABCD*. Pole trójkąta równoramiennego *ACS* jest równe 120 oraz $|AC| : |AS| = 10 : 13$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Wówczas oczywiście $|AC| : |AS| = \frac{5x + 5x}{13x} = \frac{10x}{13x} = 10 : 13$. Skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa aby wyznaczyć wysokość ostrosłupa w zależności od *x*: $\left(\frac{1}{2}|AC|\right)^2 + H^2 = |AS|^2$, stąd $(5x)^2 + H^2 = (13x)^2$, czyli $H^2 = 144x^2$, $H = 12x$. Ponieważ pole trójkąta *ACS* jest równe 120, więc otrzymujemy $\frac{1}{2}|AC| \cdot H = 120$. Stąd $(5x) \cdot (12x) = 120$, czyli $x^2 = 2$ i $x = \sqrt{2}$.

Przekątna AC kwadratu $ABCD$ ma więc długość $10\sqrt{2}$, zatem bok tego kwadratu ma długość 10.

Wysokość h ściany bocznej BCS można wyznaczyć z twierdzenia Pitagorasa:

$$\left(\frac{1}{2}|BC|\right)^2 + h^2 = \left(AS\right)^2,$$

$$5^2 + h^2 = \left(13\sqrt{2}\right)^2,$$

$$h^2 = 313,$$

$$h = \sqrt{313}.$$

Możemy już teraz policzyć pole powierzchni bocznej: $P = 4\left(\frac{1}{2}\cdot 10\cdot\sqrt{313}\right) = 20\sqrt{313}$.

Na koniec rozwiążemy problem, który będzie odwoływał się do mierzenia kątów w ostrosłupie.

Zadanie 8.

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym wysokość podstawy ma długość 6. Oblicz objętość ostrosłupa wiedząc, że kąt o mierze $45°$ jest

a) kątem nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy;

b) kątem nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy;

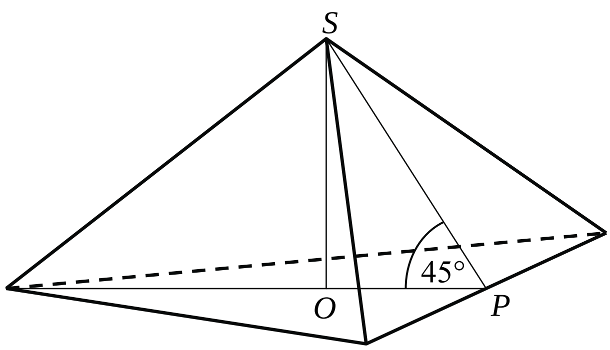
c) kątem nachylenia krawędzi bocznej do krawędzi podstawy.

Rozwiązanie

Zacznijmy od wyznaczenia pola podstawy ostrosłupa. Wiemy, że wysokość trójkąta równobocznego wyraża się wzorem $h_P = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, gdzie a jest długością boku trójkąta, zatem $\frac{a\sqrt{3}}{2} = 6$, czyli $a = \frac{6\cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$. Zatem $P_P = \frac{a\cdot h_P}{2} = \frac{4\sqrt{3}\cdot 6}{2} = \frac{24\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$.

A teraz przejdziemy do rozwiązania w istocie trzech różnych zadań.

Ad. a) Zaznaczmy na rysunku kąt, o którym mowa w tej części treści zadania, tj. **kąt, jaki ściana boczna tworzy z płaszczyzną podstawy**.

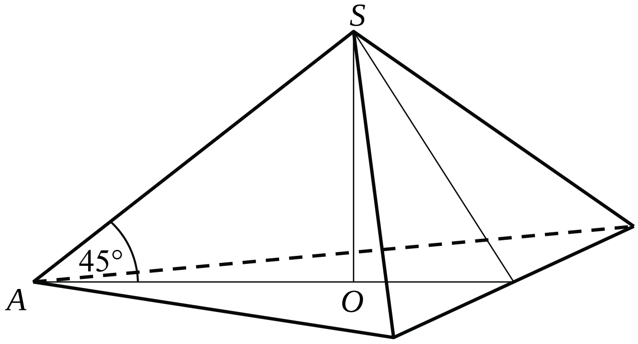


W rzeczywistości jest **to kąt, jaki wysokość ściany bocznej tworzy z wysokością podstawy**. Dorysowując wysokość ostrosłupa, która w przypadku ostrosłupa prawidłowego trójkątnego dzieli wysokość podstawy w stosunku 2:1, otrzymujemy trójkąt prostokątny POS. Ponieważ miara kąta *SPO* jest równa $45°$ $\left(tg45° = \frac{|OS|}{|OP|} = 1 \right)$ więc $|OP| = |OS|$. Zatem $|OS| = \frac{1}{3} h_P = 2$.

Szukana objętość jest więc równa

$$V = \frac{1}{3} P_P \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 2 = 8\sqrt{3}.$$

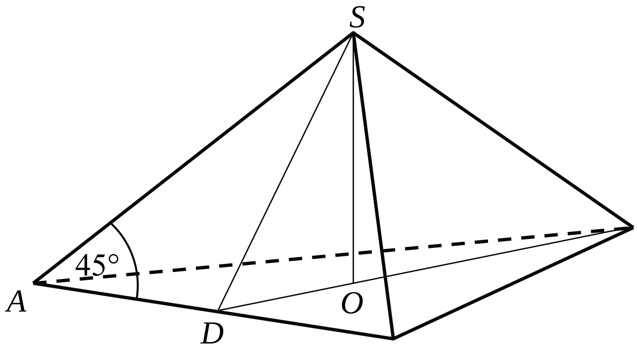
Ad. b) Teraz rozważamy kąt między krawędzią boczną i płaszczyzną podstawy.



Jest **to kąt między krawędzią** *AS* **a wysokością podstawy**. Tak jak w poprzednio rozważanym problemie, dorysowanie wysokości ostrosłupa pozwala analizować związki w trójkącie prostokątnym – tym razem *AOS*. Miara kąta *OAS* jest równa $45°$, więc $|OA| = |OS|$. Zatem $|OS| = \frac{2}{3} h_p = 4$. Szukana objętość jest więc równa

$$V = \frac{1}{3} P_P \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 4 = 16\sqrt{3}.$$

Ad. c) Teraz rozważamy **kąt między krawędzią boczną i krawędzią podstawy**.



Jest **to kąt w trójkącie prostokątnym** *ADS***, którego bokami są krawędź boczna** *AS***, wysokość ściany bocznej** *DS* **i połowa krawędzi podstawy**. Miara kąta *DAS* jest równa $45°$, więc $|DA| = |DS|$. Zatem $|DS| = \frac{1}{2} a = 2\sqrt{3}$. Dla trójkąta, którego przyprostokątnymi są odcinki *DO* i *OS* możemy zapisać twierdzenie Pitagorasa $|OS|^2 + |OD|^2 = |DS|^2$.

Stąd

$$|OS|^2 = |DS|^2 - |DO|^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3} h_P\right)^2 = 12 - 4 = 8,$$

więc $|OS| = \sqrt{8}$. Szukana objętość jest więc równa

$$V = \frac{1}{3} P_P \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot \sqrt{8} = 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{6}.$$

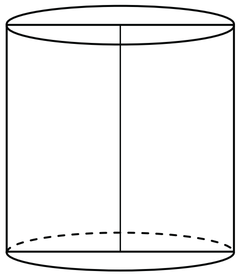
XVI. BRYŁY OBROTOWE

Zadania dotyczące brył obrotowych możemy znaleźć w Informatorze maturalnym z matematyki od roku 2010. Jak dotąd nie wystąpiły w arkuszu z matury próbnej w listopadzie 2009, matury właściwej w maju 2010, ani też w arkuszu z ostatniej matury próbnej w listopadzie 2010. Nie oznacza to jednak, że takie zadania nie mogą wystąpić w kolejnych arkuszach opublikowanych przez CKE.

Przyjrzymy się zadaniom z tego działu matematyki. **Rozpoczniemy od zadań „z walcem**".

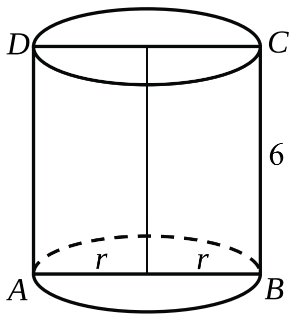
Zadanie 1. (Informator maturalny, s. 83, zadanie 49)

Przekrój osiowy walca jest kwadratem o boku długości 6. Objętość tego walca jest równa



A. 18π **B.** 54π **C.** 108π **D.** 216π

Rozwiązanie



Ponieważ prostokąt *ABCD*, czyli przekrój osiowy walca, jest kwadratem, więc $|AB| = |CD|$, czyli $2r = 6$. Stąd $r = 3$. Objętość walca jest zatem równa

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 54\pi .$$

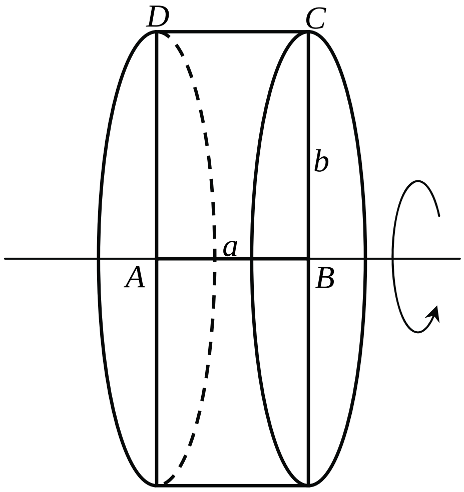
Wybieramy poprawną odpowiedź **B**.

Zadanie 2. (Informator maturalny, s. 29, zadanie 6)

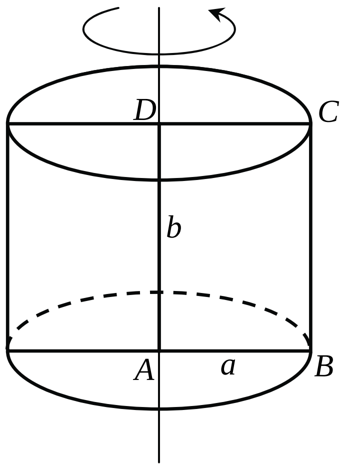
Prostokąt *ABCD* obracając się wokół boku *AB*, zakreślił walec w_1. Ten sam prostokąt obracając się wokół boku *AD*, zakreślił walec w_2. Otrzymane walce maja równe pola powierzchni całkowitych. Wykaż, że prostokąt *ABCD* jest kwadratem.

Rozwiązanie

Oznaczmy długości boków *AB* i *AD* prostokąta *ABCD* odpowiednio przez *a* i *b*. Obracając prostokąt wokół *AB* otrzymujemy walec w_1, którego wysokość jest równa *a*, natomiast promień podstawy jest równy *b* (zobacz rysunek 1.). Po obrocie prostokąta wokół *AD* otrzymujemy walec w_2 (zobacz rysunek 2.). Wysokość tego walca jest równa *b*, promień podstawy jest równy *a*.



Rys.1



Rys.2

Możemy teraz obliczyć pola powierzchni całkowitych obu tych walców. Oznaczmy je odpowiednio P_1 i P_2.

$$P_1 = 2\pi b^2 + 2\pi b \cdot a = 2\pi b\left(b+a\right) \text{ oraz } P_2 = 2\pi a^2 + 2\pi a \cdot b = 2\pi a\left(a+b\right)$$

Ponieważ pola te są równe, więc otrzymujemy

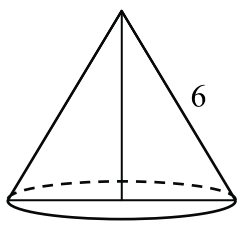
$$2\pi b\left(b+a\right) = 2\pi a\left(a+b\right).$$

Dzieląc obie strony tej równości przez $2\pi\left(b+a\right)$ dostajemy $b = a$. To oznacza, że wszystkie boki prostokąta *ABCD* są tej samej długości, czyli ten prostokąt jest kwadratem. To kończy dowód. Jak widać dowód wcale nie był taki trudny.

Przejdźmy do kolejnej bryły obrotowej, jaką jest **stożek**.

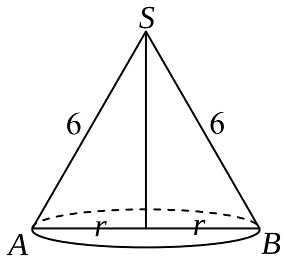
Zadanie 3. (Informator maturalny, s. 83, zadanie 50)

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o boku długości 6. Pole powierzchni bocznej tego stożka jest równe



A. 12π **B.** 18π **C.** 27π **D.** 36π

Rozwiązanie



Ponieważ przekrój osiowy jest trójkątem równobocznym, więc $2r = 6$. Stąd $r = 3$. Teraz możemy obliczyć pole powierzchni bocznej tego stożka

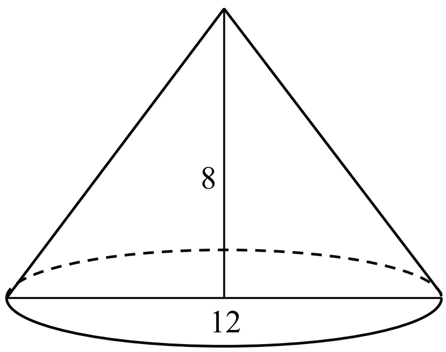
$$P_b = \pi r l = \pi \cdot 3 \cdot 6 = 18\pi$$

Poprawną odpowiedzią jest **B**.

Jako ćwiczenie proponujemy rozwiązanie zadania 4.

Zadanie 4. (Informator maturalny, s. 88, zadanie 91)

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równoramiennym o podstawie długości 12. Wysokość stożka jest równa 8. Oblicz pole powierzchni bocznej tego stożka.



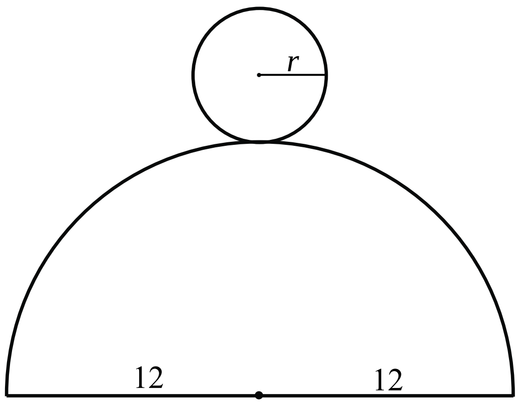
Zadanie 5. (Informator maturalny, s. 38, zadanie 11)

Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu na płaszczyznę jest półkolem o promieniu 12 cm. Podstawa tego stożka jest kołem o promieniu

A. 12 cm **B.** 6 cm **C.** 3 cm **D.** 1 cm

Rozwiązanie

Sporządźmy rysunek postawy stożka i jego powierzchni bocznej po rozwinięciu na płaszczyznę.



Pole półkola jest równe połowie pola koła o promieniu 12, czyli

$$\frac{1}{2}\pi \cdot 12^2 = 72\pi .$$

Ale ten wycinek to powierzchnia boczna naszego stożka i promień tego półkola to długość tworzącej naszego stożka. Wykorzystując wzór na pole powierzchni bocznej stożka mamy

$$P_b = \pi \cdot r \cdot 12 .$$

Porównując te pola otrzymujemy

$$72\pi = 12\pi r .$$

Stąd $r = 6$. Poprawna odpowiedź, to **B.**

Zadanie 6.

Walec i stożek mają równe objętości oraz równe promienie podstaw. Wtedy

A. wysokość walca jest równa wysokości stożka.

B. wysokość walca jest dwa razy większa od wysokości stożka.

C. wysokość walca jest trzy razy mniejsza od wysokości stożka.

D. wysokość walca jest cztery razy mniejsza od wysokości stożka.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez *r* promień podstawy walca. Jest to jednocześnie promień stożka. Oznaczmy dalej przez h_w wysokość walca oraz h_s wysokość stożka. Objętości walca oraz stożka są wtedy równe

$$V_w = \pi r^2 h_w \text{ oraz } V_s = \frac{1}{3}\pi r^2 h_s .$$

Ponieważ te objętości są równe, więc otrzymujemy równość

$$\pi r^2 h_w = \frac{1}{3}\pi r^2 h_s ,$$

a stąd

$$h_w = \frac{1}{3} h_s .$$

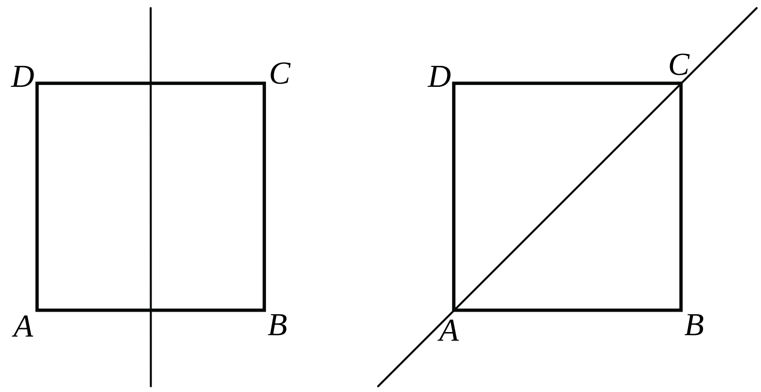
To oznacza, że wysokość walca jest trzy razy mniejsza od wysokości stożka. Wybieramy zatem odpowiedź **C**.

Zadanie 7.

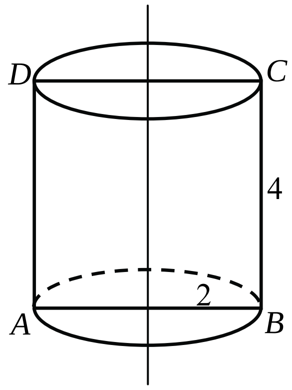
Kwadrat o boku długości 4 obracamy wokół jego osi symetrii. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej otrzymanej bryły. Rozważ wszystkie przypadki.

Rozwiązanie

Zastanówmy się najpierw nad ostatnim zdaniem i spróbujmy odpowiedzieć na pytanie, o jakie przypadki tu chodzi i ile ich jest. Odpowiedź na to pytanie znajdziemy analizując obrót kwadratu wokół jego osi symetrii. **Kwadrat ma dwa rodzaje osi symetrii.** Jeden rodzaj to proste przechodzące przez środki przeciwległych boków, drugi rodzaj to proste przechodzące przez przeciwległe wierzchołki. Innych rodzajów osi symetrii kwadrat nie ma. Obie te sytuacje przedstawione są na poniższych rysunkach.



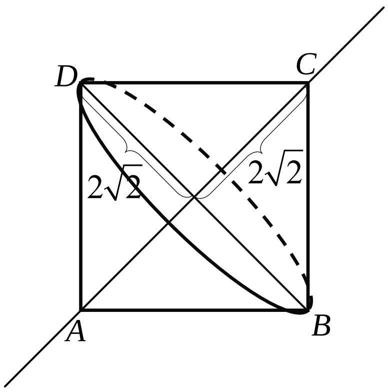
Mamy więc dwa przypadki do rozważenia. **Po obrocie kwadratu wokół prostej przechodzącej przez środki przeciwległych boków otrzymujemy walec**, którego wysokością jest bok kwadratu, a promień podstawy to połowa długości boku.



Objętość i pole powierzchni całkowitej tego walca wynoszą

$$V_w = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi \text{ oraz } P_w = 2\pi \cdot 2^2 + 2\pi \cdot 2 \cdot 4 = 24\pi .$$

Po obrocie kwadratu wokół prostej przechodzącej przez przeciwległe wierzchołki kwadratu otrzymujemy bryłę złożoną z dwóch przystających stożków. Wysokość każdego z nich jest równa promieniowi jego podstawy i jest połową długości przekątnej kwadratu. Długość przekątnej jest równa $d = 4\sqrt{2}$, więc jej połowa to $2\sqrt{2}$.



Objętość tej bryły jest zatem sumą objętości tych stożków, a pole powierzchni całkowitej jest sumą powierzchni bocznych tych stożków.

$$V_s = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^2 \cdot 2\sqrt{2} = \frac{32\sqrt{2}\pi}{3} \text{ oraz } P_s = 2\pi \cdot 2\sqrt{2} \cdot 4 = 16\sqrt{2}\pi .$$

Zajmijmy się teraz kulą.

Zadanie 8.

Dwie jednakowe metalowe kule, każda o promieniu 1 cm, zostały przetopione na jedną kulę. Promień otrzymanej kuli jest równy

A. 2 cm **B.** $2\sqrt{2}$ cm **C.** $\sqrt{2}$ cm **D.** $\sqrt[3]{2}$ cm

Rozwiązanie

Oznaczmy przez *r* promień kuli, która została odlana z metalu ze stopionych dwóch kul. Objętość każdej ze stopionych kul jest równa

$$\frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{4}{3}\pi,$$

więc metal z obu stopionych kul ma objętość

$$2 \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi.$$

Jest to jednocześnie objętość odlanej kuli. Jej promień oznaczmy przez *r*. Możemy zatem zapisać równanie

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{8}{3}\pi.$$

Stąd $r^3 = 2$, więc $r = \sqrt[3]{2}$. Poprawną odpowiedzią jest **D**.

Jako ćwiczenie proponujemy rozwiązanie zadania9.

Zadanie 9.

Objętość kuli jest równa objętości stożka. Wysokość tego stożka jest 2 razy mniejsza niż promień jego podstawy. Wykaż, że pole powierzchni kuli jest równe polu podstawy stożka.

XVII. STATYSTYKA

Przygotowując się do matury, oprócz biegłości w interpretowaniu informacji przedstawionych w tabelach i na wykresach, zdający musi wykazać się umiejętnością liczenia średniej arytmetycznej, mediany, średniej ważonej oraz odchylenia standardowego dla zestawu danych. Nie będziemy tutaj przytaczać definicji, niemniej będziemy się do nich odnosić, przy rozwiązywaniu zadań.

Zacznijmy od rozwiązania zadania z matury.

Zadanie 1. (Egzamin maturalny – maj 2010, s. 8, zadanie 25)

Średnia arytmetyczna dziesięciu liczb *x*, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 4, 1, 5 jest równa 3. Wtedy

A. $x=2$ **B.** $x=3$ **C.** $x=4$ **D.** $x=5$

Rozwiązanie

Korzystając bezpośrednio z definicji średniej arytmetycznej mamy

$$\frac{x+3+1+4+1+5+1+4+1+5}{10}=3,$$

czyli

$$\frac{x+25}{10}=3.$$

Stąd otrzymujemy $x+25=30$, a więc $x=5$. Zaznaczamy odpowiedź **D**.

W Informatorze o egzaminie maturalnym proponuje się między innymi rozwiązanie poniższych zadań.

Zadanie 2. (Informator maturalny, s. 64, zadanie 24)

Uczeń otrzymał pięć ocen: 5, 3, 6, *x*, 3. Średnia arytmetyczna tych ocen jest równa 4. Oblicz *x* i medianę tych pięciu ocen.

Rozwiązanie

Ponownie skorzystamy z definicji średniej arytmetycznej i otrzymamy

$$\frac{5+3+6+x+3}{5}=4,$$

$$\frac{17+x}{5}=4,$$

$$17+x=20,$$

$$x=3.$$

Aby obliczyć średnią, nasze dane nie muszą być uporządkowane tj. ustawione od najmniejszej do największej (lub odwrotnie). Jednak w celu wyznaczenia mediany musimy to zrobić – otrzymujemy $3, 3, 3, 5, 6$. Mediana jest to wynik środkowy (tyle samo liczb jest na lewo, jak i na prawo od mediany). Mediana w naszym przypadku jest równa 3.

Gdybyśmy mieli parzystą ilość liczb, to wówczas policzylibyśmy średnią arytmetyczną dwóch liczb środkowych, tak jak w następującym zadaniu z Informatora

Zadanie 3. (Informator maturalny, s. 87, zadanie 83)

Oblicz medianę danych: 0, 1, 3, 3, 1, 1, 2, 1.

Rozwiązanie

Porządkujemy dane w ciąg niemalejący: 0, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3. Ponieważ jest osiem danych, to nie możemy wskazać dokładnie jednej, leżącej pośrodku tych liczb. Środek „wypada” między czwartą i piątą daną

„środek”

$$\underbrace{0,\ 1,\ 1,\ 1}_{\text{cztery na lewo od „środka”}}\overset{\downarrow}{,}\ \underbrace{1,\ 2,\ 3,\ 3}_{\text{cztery na prawo od „środka”}}$$

Bierzemy dwie dane „środkowe”, w naszym przypadku są to 1 i 1, i liczymy ich średnią arytmetyczną $\frac{1+1}{2}=1$. Mediana jest równa 1.

Poniższe zadanie jest częścią zadania zamieszczonego w Informatorze.

Zadanie 4. (Informator maturalny, s. 31, zadanie 16)

Tabela zawiera niektóre wyniki pisemnego sprawdzianu z matematyki w pewnej klasie maturalnej (ocenionego w sześciostopniowej skali ocen).

	dziewczęta	chłopcy
liczba piszących	11	14
średnia	4	3,8

Oblicz średnią ocen z tego sprawdzianu **dla całej klasy**. Wyniki podaj z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku.

Rozwiązanie

Wydaje się, że nie mamy danych dotyczących liczby poszczególnych ocen. Zanim rozwiążemy podane zadanie, rozważmy poniższy przykład. Przypuśćmy, że w klasie mamy pięciu chłopców z oceną 5, trzech z oceną 4, jednego z oceną 2 i jednego z oceną 1. Zapiszmy wyrażenie „służące” liczeniu ich średniej:

$$\bar{x}_{ch}=\frac{5\cdot 5+3\cdot 4+1\cdot 2+1\cdot 1}{5+3+1+1}=\frac{25+12+2+1}{10}=4.$$

Czyli $5\cdot 5+3\cdot 4+1\cdot 2+1\cdot 1=10\cdot 4$, **zatem iloczyn średniej przez liczbę uczniów daje nam licznik wyrażenia służącego obliczeniu tej średniej**.

Podobnie wśród dziewcząt, dziesięć otrzymało ocenę 5, jedna ocenę 4 i jedna ocenę 3.

Średnia ocena dziewcząt jest zatem równa $\bar{x}_{dz}=\frac{10\cdot 5+1\cdot 4+1\cdot 3}{10+1+1}=4{,}75$.

Stąd $10\cdot 5+1\cdot 4+1\cdot 3=12\cdot 4{,}75$.

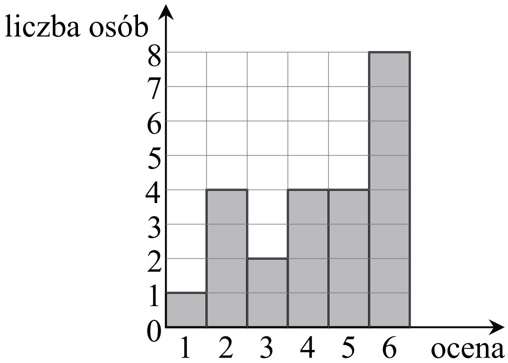
Policzmy średnią $\overline{x}_{kl}$ dla całej klasy

$$\overline{x}_{kl} = \frac{(10+5)\cdot 5+(1+3)\cdot 4+(1+0)\cdot 3+(0+1)\cdot 2+(0+1)\cdot 1}{22} =$$
$$= \frac{(10\cdot 5+1\cdot 4+1\cdot 3)+(5\cdot 5+3\cdot 4+1\cdot 2+1\cdot 1)}{22} = \frac{12\cdot 4,75+10\cdot 4}{22} =$$
$$= \frac{57+40}{22} = \frac{97}{22} \approx 4,41$$

Teraz możemy wrócić do zadania. Szukana średnia jest równa $\frac{11\cdot 4+14\cdot 3,8}{11+14} \approx 3,89$.

Zadanie 5. (Informator maturalny, s. 40, zadanie 12)

Wyniki sprawdzianu z matematyki są przedstawione na diagramie.



Mediana ocen uzyskanych przez uczniów jest równa

A. 6 **B.** 5 **C.** 4,5 **D.** 4

Rozwiązanie

Nie będziemy wypisywać ocen tylko policzymy ich liczbę: $1+4+2+4+4+8=23$. Liczba ocen jest nieparzysta, możemy więc wskazać ocenę (liczbę) środkową – jest nią dwunasta ocena, czyli bardzo dobry (bierzemy jedną ocenę niedostateczną, następnie cztery dopuszczające, dalej dwie dostateczne i cztery oceny dobre – w sumie jedenaście ocen). Zaznaczamy odpowiedź **B**.

Zadanie 6. (Informator maturalny, s. 81, zadanie 42)

Mediana danych przedstawionych w tabeli liczebności jest równa

wartość	0	1	2	3
liczebność	5	2	1	1

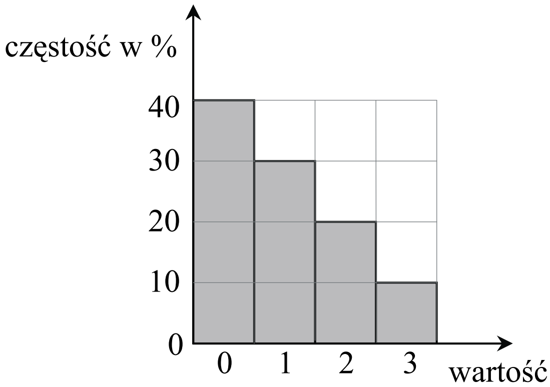
A. 0 **B.** 0,5 **C.** 1 **D.** 5

Rozwiązanie

Podobnie jak wcześniej obliczmy, że jest 9 wyników: pięć zer, dwie jedynki, jedna dwójka i jedna trójka. Jest nieparzysta ilość wyników, zatem medianą jest środkowy, czyli piąty wynik – jest to wartość 0. Zaznaczamy **A**.

Zadanie 7. (Informator maturalny, s. 82, zadanie 43)

Średnia arytmetyczna danych przedstawionych na diagramie częstości jest równa



A. 1 **B.** 1,2 **C.** 1,5 **D.** 1,8

Rozwiązanie

Mamy do czynienia ze średnią ważoną, gdzie poszczególnych wartości nie będziemy mnożyć przez bezwzględną częstość ich występowania, ale przez częstość wyrażoną w procentach.

Średnia jest równa $\dfrac{40\% \cdot 0 + 30\% \cdot 1 + 20\% \cdot 2 + 10\% \cdot 3}{100\%} = \dfrac{100\%}{100\%} = 1$.

Zaznaczamy odpowiedź **A**.

Na koniec zadanie odwołujące się do graficznego przedstawienia danych.

Zadanie 8.

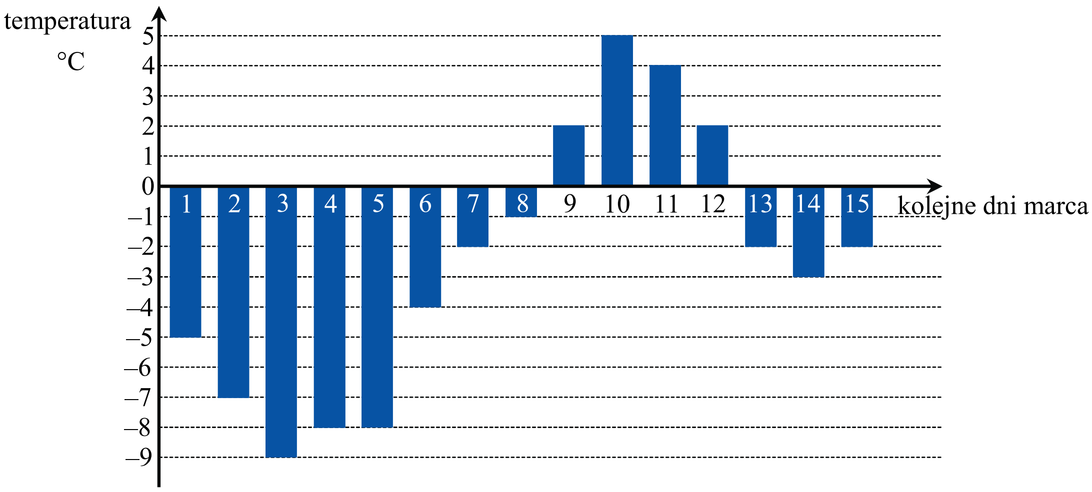
Wykres przedstawia wartość temperatury mierzonej w południe, w pierwszej połowie marca. Korzystając z wykresu oblicz:

a) średnią temperaturę w drugim tygodniu marca;

b) odchylenie standardowe wartości temperatury w drugim tygodniu marca;

c) medianę liczoną w pierwszej połowie miesiąca.

Wynik zaokrąglij do drugiego miejsca po przecinku.



Rozwiązanie

a) Średnia temperatura jest równa $\frac{(-1)+2+5+4+2+(-2)+(-3)}{7}=\frac{7}{7}=1$.

b) **Wariancję, czyli kwadrat odchylenia standardowego** obliczymy na dwa sposoby.

Pierwszy sposób

Wykorzystamy definicję wariancji, którą znajdziemy w *Zestawie wzorów* na stronie 16. Stosując ją mamy

$$\sigma^2=\frac{(-1-1)^2+(2-1)^2+(5-1)^2+(4-1)^2+(2-1)^2+(-2-1)^2+(-3-1)^2}{7}=$$
$$=\frac{4+1+16+9+1+9+16}{7}=\frac{56}{7}=8$$

Drugi sposób

Wykorzystamy wzór pozwalający obliczyć wariancję. Wzór ten jest podany również w *Zestawie*, jako druga część równości

$$\sigma^2=\frac{\left(a_1-\overline{a}\right)^2+\left(a_2-\overline{a}\right)^2+\ldots+\left(a_n-\overline{a}\right)^2}{n}=\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}-\left(\overline{a}\right)^2.$$

Pierwsza część tej równości, to definicja wariancji, którą wykorzystaliśmy w pierwszym sposobie. Wzór ten pozwala nieco uprościć rachunki. Stosując go mamy

$$\sigma^2=\frac{\left(-1\right)^2+2^2+5^2+4^2+2^2+\left(-2\right)^2+\left(-3\right)^2}{7}-1^2=8.$$

Zatem odchylenie standardowe jest równe $\sigma=\sqrt{8}$. Po zaokrągleniu wyniku do drugiego miejsca po przecinku mamy $\sigma\approx 2,83$.

c) Kolejne zmierzone temperatury w pierwszej połowie marca to:

$$-5,-7,-9,-8,-8,-4,-2,-1,\ 2,\ 5,\ 4,\ 2,-2,-3,-2.$$

Po ich uporządkowaniu w ciąg niemalejący dostajemy

$$-9,-8,-8,-7,-5,-4,-3,-2,-2,-2,-1,\ 2,\ 2,\ 4,\ 5.$$

Danych jest 15, więc dokładnie jedna z nich znajduje się po środku. Jest to ósma dana, czyli -2. Jest to właśnie mediana.

XVIII. KOMBINATORYKA

Z zadaniami z kombinatoryki spotykamy się niemal na każdym kroku. Rozwiązując je często nikomu nawet nie przyjdzie do głowy, że właśnie rozwiązuje zadanie z kombinatoryki. Gdy rozgrywany jest turniej szachowy, w którym każdy zawodnik gra jedną partię z każdym innym, to zadanie polegające na obliczeniu liczby wszystkich rozegranych partii jest przykładem zadania z kombinatoryki. **W dużym uproszczeniu można powiedzieć, że kombinatoryka to umiejętność zliczania.**

Zadanie 1.

Wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych jest

A. 89 **B.** 90 **C.** 91 **D.** 100

Rozwiązanie

To z pozoru banalne zadanie jest bardzo często błędnie rozwiązywane. Ustalmy najpierw, o jakie liczby nam chodzi. Najmniejszą liczba naturalną dwucyfrową jest 10, największą 99. Ile jest tych liczb? Tu często pada błędna odpowiedź $99-10=89$. Na czym polega błąd? Wypiszmy liczby naturalne od 1 do 99. Zaznaczmy na zielono te, które nas interesują, a te, które nas nie interesują na czerwono.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, …, 96, 97, 98, 99

Wszystkich zapisanych liczb jest 99, czerwonych jest 9, więc zielonych jest $99-9=90$.

Możemy również wpisać wszystkie liczby naturalne od 1 do 100. Dla jasności zapiszmy je w dziesięciu kolumnach, po dziesięć w każdej kolumnie.

1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Na zielono zaznaczyliśmy liczby dwucyfrowe, a na czerwono pozostałe. Te, które nie są dwucyfrowe, to dziewięć liczb z pierwszej kolumny i jedna – ostatnia liczba z ostatniej kolumny. Więc szukanych liczb jest $100-10=90$. Możemy więc podać poprawną odpowiedź **B**.

Zadanie 2.

Rankiem 17 marca 2010 roku statek wypłynął w rejs. Rejs zakończył się wieczorem 12 maja 2010 roku. Każdego dnia, raz dziennie, w samo południe kapitan odnotowywał położenie statku w dzienniku okrętowym. Ile razy podczas rejsu kapitan odnotował położenie statku?

Rozwiązanie

Rozwiązanie tego zadania sprowadza się do zliczenia wszystkich dni rejsu (każdego dnia kapitan odnotował położenie statku). W marcu było 31 dni. Od 31 odejmujemy 16 (przez pierwszych 16 dni marca rejsu jeszcze nie było), dostajemy 15. W kwietniu było 30 dni. Majowych dni rejsu było 12. Razem mamy $15+30+12=57$ dni.
Odpowiedź: Podczas rejsu kapitan odnotował położenie statku 57 razy.

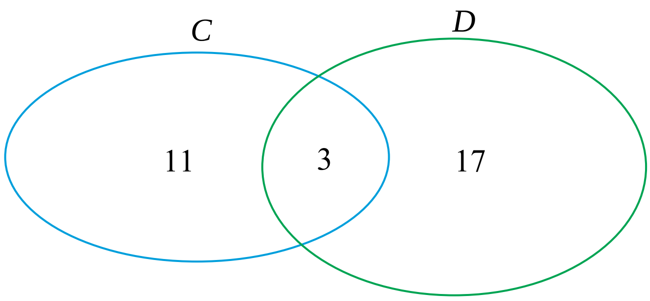
Zajmijmy się teraz sytuacją, gdzie **mamy dwa zbiory elementów i chcemy zliczyć łączną liczbę elementów z obu zbiorów, albo liczbę elementów wspólnych tych zbiorów, albo wreszcie liczbę tych elementów, które należą tylko do jednego z tych zbiorów.**

Zadanie 3.

W trzydziestojednoosobowej klasie każdy uczeń uczy się języka niemieckiego lub języka angielskiego, 14 uczniów uczy się języka niemieckiego, 20 uczniów uczy się języka angielskiego. Ilu uczniów z tej klasy uczy się tylko języka angielskiego?

Rozwiązanie

Na pozór mogłoby się wydawać, że jeśli w klasie 14 uczniów uczy się języka niemieckiego, a 20 uczy się angielskiego, to powinno być w klasie 34 uczniów. Jak to jest więc możliwe, że jest ich 31? Muszą być tacy, którzy uczą się obu tych języków. Jest zatem trzech takich uczniów (to ta „nadwyżka” między 31 a 34). Teraz już możemy policzyć ilu uczniów uczy się tylko języka angielskiego. Wystarczy odjąć $20-3=17$.
Odpowiedź: W tej klasie jest 17 uczniów, którzy uczą się tylko języka angielskiego.
Uwaga. **Wygodnie jest tę sytuację przedstawić graficznie**



C to zbiór tych uczniów klasy, którzy uczą się niemieckiego, *D* – zbiór tych, którzy uczą się angielskiego. Zbiory te maja niepustą część wspólną. Do niej należy tych trzech uczniów, którzy uczą się obu języków. Widać też, ilu jest tych, którzy uczą się tylko niemieckiego.

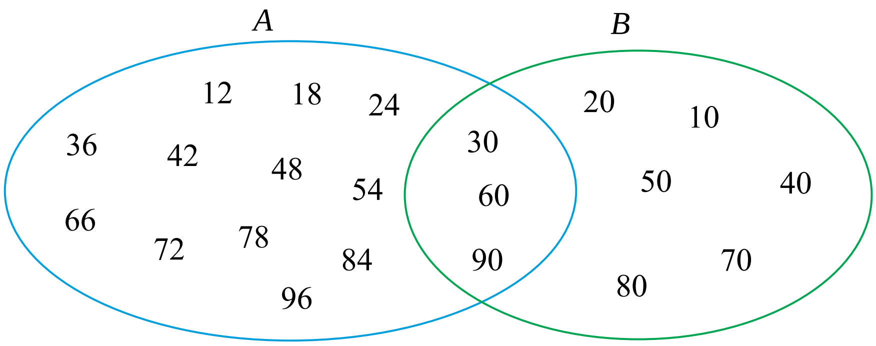
Zadanie 4. (Informator maturalny, s. 81, zadanie 38)

Wszystkich liczb dwucyfrowych, które są podzielne przez 6 lub przez 10, jest

A. 25 **B.** 24 **C.** 21 **D.** 20

Rozwiązanie

W tym zadaniu mamy podobną sytuację, jak w zadaniu poprzednim. Policzmy, ile jest liczb dwucyfrowych podzielnych przez 6. Są to liczby: 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96. Jest ich 15. Teraz policzmy, ile jest liczb dwucyfrowych podzielnych przez 10. Są to liczby: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 i 90. Jest ich 9. **Ponieważ są takie liczby dwucyfrowe, które są podzielne i przez 6 i przez 10, więc musimy uważać, żeby takich liczb nie liczyć dwukrotnie.** Oznaczmy przez A zbiór liczb dwucyfrowych podzielnych przez 6 i przez B zbiór liczb dwucyfrowych podzielnych przez 10. Możemy tę sytuację zilustrować podobnie jak w zadaniu poprzednim



W zbiorze $A \cup B$ jest zatem 21 elementów. Oczywiście rysunek nie jest konieczny. Liczbę elementów zbioru $A \cup B$, czyli zbioru liczb dwucyfrowych, które są podzielne przez 6 lub przez 10, obliczymy dodając liczbę elementów A do liczby elementów zbioru B i odejmując od tej sumy liczbę elementów zbioru $A \cap B$, czyli zbioru liczb dwucyfrowych podzielnych przez 6 i przez 10. Oznaczając liczbę elementów zbioru X przez $|X|$ możemy zapisać równość

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

$$|A \cup B| = 15 + 9 - 3 = 21.$$

Wybieramy poprawną odpowiedź **C**.

Jako ćwiczenie proponujemy rozwiązanie zadania 5.

Zadanie 5. (Informator maturalny, s. 86, zadanie 78)

Ile jest liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 15 lub 20?

Przejdźmy teraz do sytuacji, w której **zliczamy takie obiekty, które są utworzone z dwóch lub więcej elementów jednego albo kilku zbiorów**.

Zadanie 6. (Próbny egzamin maturalny – listopad 2010, s. 10, zadanie 24)

W karcie dań jest 5 zup i 4 drugie dania. Na ile sposobów można zamówić obiad składający się z jednej zupy i jednego drugiego dania?

A. 25 **B.** 20 **C.** 16 **D.** 9

Rozwiązanie

Oznaczmy przez Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 zupy, a przez D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 drugie dania. Wypiszmy zestawy obiadowe, jakie możemy zamówić:

$$Z_1 \text{ i } D_1,\quad Z_1 \text{ i } D_2,\quad Z_1 \text{ i } D_3,\quad Z_1 \text{ i } D_4,\quad Z_1 \text{ i } D_5,$$
$$Z_2 \text{ i } D_1,\quad Z_2 \text{ i } D_2,\quad Z_2 \text{ i } D_3,\quad Z_2 \text{ i } D_4,\quad Z_2 \text{ i } D_5,$$
$$Z_3 \text{ i } D_1,\quad Z_3 \text{ i } D_2,\quad Z_3 \text{ i } D_3,\quad Z_3 \text{ i } D_4,\quad Z_3 \text{ i } D_5,$$
$$Z_4 \text{ i } D_1,\quad Z_4 \text{ i } D_2,\quad Z_4 \text{ i } D_3,\quad Z_4 \text{ i } D_4,\quad Z_5 \text{ i } D_5.$$

Mamy zatem 20 możliwych do zamówienia zestawów. Wybieramy poprawną odpowiedź **B**. Liczbę tych zestawów mogliśmy obliczyć łatwo bez ich wypisywania. Zupę możemy wybrać na pięć sposobów, a gdy wybierzemy zupę, to do tej wybranej zupy możemy dołożyć jedno z czterech drugich dań. W rezultacie mamy $5 \cdot 4 = 20$ możliwych zestawów obiadowych.

W tym rozwiązania zastosowaliśmy tzw. **regułę mnożenia**, którą w najprostszym przypadku możemy sformułować następująco:

Jeżeli wykonujemy kolejno po sobie dwie czynności, przy czym rezultat pierwszej nie ma wpływu na rezultat drugiej, pierwszą możemy zakończyć jednym z n **wyników, drugą jednym z** m **wyników, to wykonanie tych dwóch czynności może zakończyć się jednym z** $n \cdot m$ **wyników.**

Analogicznie jak w przypadku kolejnych dwóch czynności, obliczamy, na ile sposobów możemy zrealizować ciąg kolejnych trzech czynności, gdzie pierwsza może zakończyć się jednym z n wyników, druga jednym z m wyników, trzecia jednym z k wyników. Wszystkich realizacji tych trzech kolejnych czynności jest $n \cdot m \cdot k$. Podobnie dla kolejnych czterech czynności, pięciu itd.

Zadanie 7. (Próbny egzamin maturalny – listopad 2010, s. 15, zadanie 31)

Oblicz, ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, w których zapisie pierwsza cyfra jest parzysta, a pozostałe nieparzyste.

Rozwiązanie

Liczbę czterocyfrową możemy utworzyć zapisując kolejno od lewej do prawej cztery cyfry. Oczywiście możemy zapisywać te cyfry w innej kolejności, jednak w rezultacie i tak możemy potem mówić o pierwszej (od lewej), drugiej, trzeciej i czwartej cyfrze. Ponieważ pierwsza cyfra ma być parzysta, więc będzie ona ze zbioru $\{2,4,6,8\}$, cyfra 0 nie może być pierwszą cyfrą liczby. Druga, trzecia i czwarta cyfra ma być nieparzysta, więc każda z nich będzie jakąś cyfrą ze zbioru $\{1,3,5,7,9\}$. Mamy zatem 4 możliwości wyboru pierwszej cyfry, 5 możliwości wyboru drugiej, 5 możliwości wyboru trzeciej i 5 możliwości wyboru czwartej cyfry. Możemy w ten sposób utworzyć $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$ takich liczb.

Odpowiedź: Jest 500 liczb naturalnych czterocyfrowych, w których zapisie pierwsza cyfra jest parzysta, a pozostałe nieparzyste.

Jako ćwiczenie proponujemy rozwiązanie zadań 8, 9 i 10.

Zadanie 8.

Na ile sposobów Ala, Bartek i Celina mogą usiąść na trzech spośród pięciu miejsc w kinie?

Zadanie 9. (Próbny egzamin maturalny – listopad 2009, s. 8, zadanie 25)

Wybieramy liczbę a ze zbioru $A=\{2,3,4,5\}$ oraz liczbę b ze zbioru $B=\{1,4\}$. Ile jest takich par (a,b), że iloczyn $a\cdot b$ jest liczba nieparzystą?

A. 2 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 20

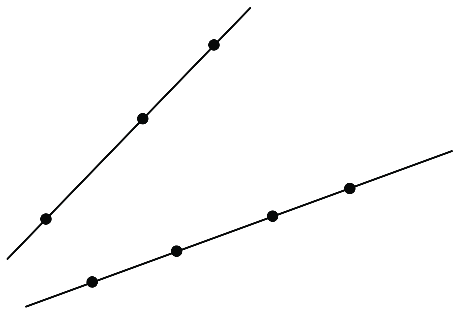
Zadanie 10. (Informator maturalny, s. 86, zadanie 79)

Ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych, w których cyfra dziesiątek jest o 2 większa od cyfry jedności?

Na zakończenie tego rozdziału rozwiążemy zadanie 11.

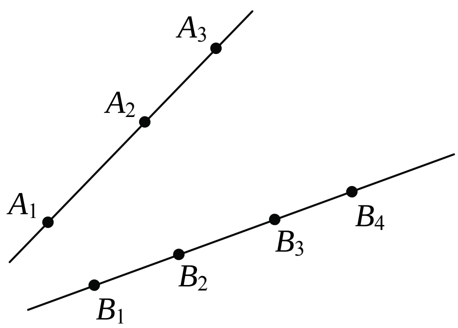
Zadanie 11. (Informator maturalny, s. 86, zadanie 80)

Na jednej prostej zaznaczono 3 punkty, a na drugiej 4 punkty (zob. rysunek). Ile jest wszystkich trójkątów, których wierzchołkami są trzy spośród zaznaczonych punktów?



Rozwiązanie

Oznaczmy te punkty tak jak na rysunku



Wypiszmy wszystkie możliwe trójkąty, których wierzchołkami są trzy spośród tych siedmiu punktów, przy czym dwa z tych punktów muszą leżeć na jednej prostej, a trzeci na drugiej. Ponieważ trójkąt o wierzchołkach K, L i M możemy oznaczyć KLM, albo MKL, albo zapisując te wierzchołki w dowolnej kolejności, więc tak będziemy zapisywać te kolejne wierzchołki trójkąta, żeby najpierw podać dwa leżące na jednej prostej i żeby numery tych wierzchołów rosły, potem zapiszemy trzeci wierzchołek. Mamy następujące trójkąty:

$A_1 A_2 B_1,\ A_1 A_2 B_2,\ A_1 A_2 B_3,\ A_1 A_2 B_4,$

$A_1 A_3 B_1,\ A_1 A_3 B_2,\ A_1 A_3 B_3,\ A_1 A_3 B_4,$

$A_2 A_3 B_1,\ A_2 A_3 B_2,\ A_2 A_3 B_3,\ A_2 A_3 B_4,$

$B_1 B_2 A_1,\ B_1 B_2 A_2,\ B_1 B_2 A_3,$

$B_1 B_3 A_1,\ B_1 B_3 A_2,\ B_1 B_3 A_3,$

$B_1 B_4 A_1,\ B_1 B_4 A_2,\ B_1 B_4 A_3,$

$B_2 B_3 A_1,\ B_2 B_3 A_2,\ B_2 B_3 A_3,$

$B_2 B_4 A_1,\ B_2 B_4 A_2,\ B_2 B_4 A_3,$

$B_3 B_4 A_1,\ B_3 B_4 A_2,\ B_3 B_4 A_3,$

Razem mamy 30 trójkątów.

XIX. RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Zadania z rachunku prawdopodobieństwa obejmujące umiejętności z poziomu podstawowego obejmą schemat klasyczny i własności prawdopodobieństwa. Nie wymagają znajomości wzorów kombinatorycznych, a jedynie umiejętności zliczania obiektów w prostych sytuacjach kombinatorycznych.

Zadanie 1. (Informator maturalny, s. 42, zadanie 25)

Ze zbioru liczb $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ wybieramy losowo jedną liczbę. Jeżeli *p* oznacza prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 3, to

A. $p<0,25$ **B.** $p=0,25$ **C.** $p=\frac{1}{3}$ **D.** $p>\frac{1}{3}$

Rozwiązanie

Doświadczenie losowe opisane w zadaniu to losowanie jednej liczby ze zbioru złożonego z 8 liczb. Możliwych wyników tego losowania jest 8. Każdy taki wynik to zdarzenie elementarne, czyli $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Wylosowanie każdej liczby z tego zbioru jest jednakowo prawdopodobne, np. wylosowanie liczby 3 jest tak samo prawdopodobne jak wylosowanie liczby 7. Zdarzeniem losowym, którego prawdopodobieństwo chcemy obliczyć jest wylosowanie liczby podzielnej przez 3. Oznaczmy to zdarzenie przez *A*. Zatem $A=\{3,6\}$, bo tylko dwie liczby (3 oraz 6) ze zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ są podzielne przez 3.

Zapisujemy teraz $|\Omega|=8$, $|A|=2$, więc $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

Wybieramy poprawną odpowiedź **B**.

Zadanie 2.

Rzucamy dwa razy symetryczną, sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że liczby oczek otrzymane w obu rzutach różnią się o 1.

Rozwiązanie

Rozwiążemy to zdanie wykorzystując model klasyczny. Doświadczenie losowe opisane w zadaniu to kolejne dwa rzuty symetryczną sześcienną kostką do gry. Pojedynczym wynikiem tego doświadczenia jest para dwóch liczb oczek, jakie uzyskamy w kolejnych rzutach. Jeśli np. w pierwszym rzucie wypadną 2 oczka, a w drugim 5, to zapiszemy to, jako parę uporządkowaną $(2,5)$. Zatem Ω jest zbiorem wszystkich takich par (a,b), że *a* jest jakąś liczbą naturalną od 1 do 6 (włącznie) oraz *b* jest też jakąś liczbą naturalną od 1 do 6 (włącznie). Wszystkich takich par jest $6\cdot 6=36$, co wynika z reguły mnożenia, czyli $|\Omega|=36$.

Oznaczmy przez A zdarzenie, że liczby oczek otrzymane w obu rzutach różnią się o 1. Wybieramy te wszystkie pary (a,b), w których liczby a i b różnią się o 1. Zwróćmy uwagę, że np. taką parą jest zarówno $(1,2)$, jak i $(2,1)$. Wypiszmy wszystkie takie pary:

$$(1,2),\ (2,1),\ (2,3),\ (3,2),\ (3,4),\ (4,3),\ (4,5),\ (5,4),\ (5,6),\ (6,5).$$

Jest ich 10, więc $|A| = 10$.

Otrzymanie każdej pary jest tak samo prawdopodobne, więc mamy do czynienia z modelem klasycznym. Z definicji obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

Odpowiedź. Prawdopodobieństwo, że liczby oczek otrzymane w dwukrotnym rzucie kostką różnią się o 1 jest równe $\frac{5}{18}$.

Jako ćwiczenie proponujemy rozwiązanie zdania 3.

Zadanie 3. (Informator maturalny, s. 87, zadanie 87)

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania iloczynu oczek równego 5.

Zadanie 4. (Informator maturalny, s. 27, zadanie 11)

Rzucamy trzy razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Opisz zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych, a następnie oblicz prawdopodobieństwo, że w każdym rzucie liczba oczek będzie większa od numeru rzutu.

Rozwiązanie

Doświadczenie losowe to trzykrotny rzut kostką. Pojedynczym wynikiem tego doświadczenia, a więc zdarzeniem elementarnym, jest ciąg trzech liczb oczek otrzymanych w kolejnych rzutach. Obliczmy, ile jest wszystkich takich ciągów. W każdym rzucie kostką wypadnie jedna z liczb oczek od 1 do 6, mamy więc 6 wyników pierwszego rzutu. Tak samo mamy 6 wyników drugiego rzutu, a także 6 wyników trzeciego rzutu. Zgodnie z regułą mnożenia liczba wyników trzech kolejnych rzutów kostką jest równa $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$, czyli

$$|\Omega| = 216.$$

Każde zdarzenie jednoelementowe jest jednakowo prawdopodobne, więc mamy do czynienia z modelem klasycznym.

Oznaczmy przez A zdarzenie, że liczba oczek w każdym rzucie będzie większa od numeru rzutu. W pierwszym rzucie będą to zatem liczby większe od 1, czyli 2, 3, 4, 5, 6, w drugim większe od 2, czyli 3, 4, 5, 6, a w trzecim większe od 3, czyli 4, 5, 6. Pierwszy rzut może zakończyć się jednym z pięciu wyników, drugi – jednym z czterech, a trzeci – jednym z trzech. Stosujemy regułę mnożenia i obliczamy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A

$$|A| = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60,$$

oraz prawdopodobieństwo tego zdarzenia

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{60}{216} = \frac{5}{18}.$$

Odpowiedź. Prawdopodobieństwo, że w każdym rzucie liczba oczek będzie większa od numeru rzutu jest równe $\frac{5}{18}$.

Przejdźmy teraz do **własności prawdopodobieństwa**. Znaleźć je możemy np. w *Zestawie wzorów* na stronie 15. Wykorzystanie tych własności pokażemy w kolejnych zadaniach.

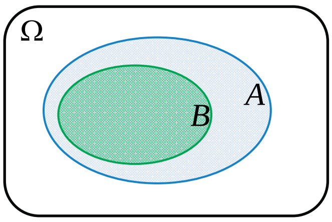
Zadanie 5. (Informator maturalny, s. 82, zadanie 45)

O zdarzeniach losowych A i B zawartych w Ω wiadomo, że $B \subset A$, $P(A) = 0,7$ i $P(B) = 0,3$. Wtedy

A. $P(A \cup B) = 1$ **B.** $P(A \cup B) = 0,7$ **C.** $P(A \cup B) = 0,4$ **D.** $P(A \cup B) = 0,3$

Rozwiązanie

Zdarzenia losowe są zbiorami, dokładniej podzbiorami zbioru Ω, dlatego bardzo wygodnie je zilustrować.



Prawdopodobieństwo zdarzenia możemy traktować jak pole zaznaczonego zbioru, pamiętając przy tym, że „pole całego zbioru Ω" jest równe 1.

Ponieważ $B \subset A$, więc sumą zbiorów A i B jest ten „większy zbiór", czyli A. Możemy to zapisać w tej sytuacji za pomocą równości $A \cup B = A$. Prawdopodobieństwo sumy zdarzeń A i B jest zatem takie samo jak prawdopodobieństwo zdarzenia A, czyli

$P(A \cup B) = P(A) = 0,7$.

Poprawna odpowiedź to **B**.

Proponujemy rozwiązanie zadania 6 w ten sam sposób.

Zadanie 6. (Informator maturalny, s. 87, zadanie 88)

A i B są takimi zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω, że $A \subset B$ oraz $P(A) = 0,3$ i $P(B) = 0,4$. Oblicz $P(A \cup B)$.

Zadanie 7. (Informator maturalny, s. 22, zadanie 9)

O zdarzeniach losowych *A*, *B* wiemy, że: $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{2}{3}$, $P(A\cup B)=\frac{4}{5}$. Oblicz $P(A\cap B)$.

Rozwiązanie

Prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń *A* i *B* obliczamy, korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

Ponieważ $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{2}{3}$, $P(A\cup B)=\frac{4}{5}$, więc

$$\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-P(A\cap B).$$

Stąd otrzymujemy

$$P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{4}{5}=\frac{11}{30}.$$

Odpowiedź: $P(A\cap B)=\frac{11}{30}$.

Niekiedy zastosowanie wzoru na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń nie jest oczywiste, a znacznie ułatwia rozwiązanie zadania.

Zadanie 8.

Ze zbioru liczb naturalnych trzycyfrowych losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowana liczba będzie podzielna przez 2 lub przez 3.

Rozwiązanie

Określmy najpierw zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych. Jest to zbiór $\Omega=\{100, 101, 102, 103, 104, ..., 998, 999\}$. Ma on 900 elementów, czyli $|\Omega|=900$.

Oznaczmy przez *A* zdarzenie, że wylosowana liczba będzie podzielna przez 2, a przez *B* zdarzenie, że wylosowana liczba będzie podzielna przez 3. Zdarzenie, że wylosowana liczba będzie podzielna przez 2 lub przez 3 to suma zdarzeń *A* i *B*. Chcemy więc policzyć $P(A\cup B)$.

Ze wzoru na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B),$$

możemy obliczyć $P(A\cup B)$, gdy będziemy znali $P(A)$, $P(B)$ oraz $P(A\cap B)$.

Obliczmy kolejno te prawdopodobieństwa. Zdarzenie *A* to $A=\{100, 102, 104, ..., 998\}$.

Sprzyja temu zdarzeniu 450 zdarzeń elementarnych, czyli $|A|=450$. Prawdopodobieństwo zdarzenia *A* jest zatem równe

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{450}{900}=\frac{1}{2}.$$

Zdarzenie B to $B = \{102, 105, 108, ..., 999\}$. Temu zdarzeniu sprzyja 300 zdarzeń elementarnych, czyli $|B| = 300$, więc

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{300}{900} = \frac{1}{3}.$$

Pozostało do obliczenia $P(A \cap B)$. Zdarzenie $A \cap B$ to iloczyn zbiorów A i B. Wylosowana liczba musi być więc jednocześnie podzielna przez 2 i przez 3, a to oznacza, że musi to być liczba podzielna przez 6, bo liczby 2 i 3 nie mają innych wspólnych dzielników niż 1. Stąd $A \cap B = \{102, 108, 114, ..., 996\}$. Liczb w tym zbiorze jest 150, czyli $|A \cap B| = 150$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia $A \cap B$ jest więc równe

$$P(B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{150}{900} = \frac{1}{6}.$$

Teraz możemy już obliczyć prawdopodobieństwo sumy zdarzeń A i B

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo, że wylosowana liczba będzie podzielna przez 2 lub przez 3 jest równe $\frac{2}{3}$.

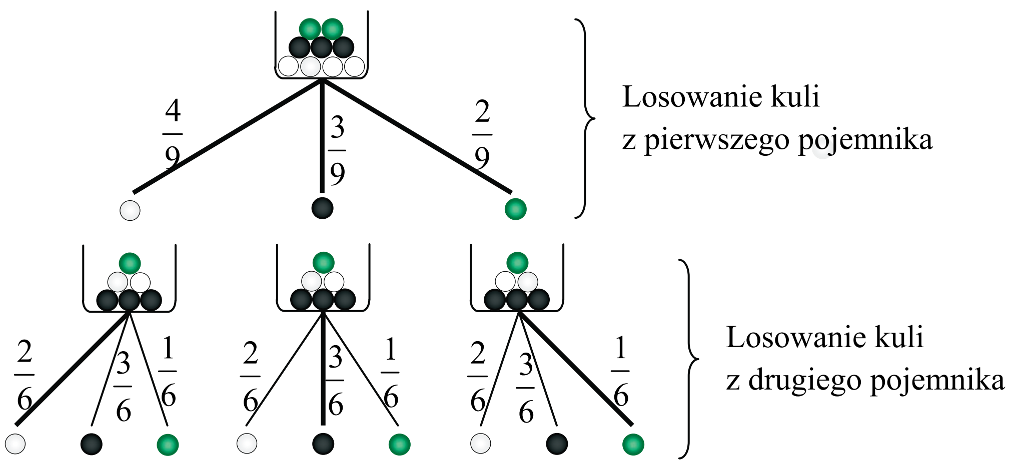
Na koniec rozwiążemy zadanie, w którym **zastosujemy metodę drzewkową**.

Zadanie 9. (Informator maturalny, s. 48, zadanie 32)

Dane są dwa pojemniki. W pierwszym z nich znajduje się 9 kul: 4 białe, 3 czarne i 2 zielone. W drugim pojemniku jest 6 kul: 2 białe, 3 czarne i 1 zielona. Z każdego pojemnika losujemy po jednej kuli. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul tego samego koloru.

Rozwiązanie

Zadanie to rozwiążemy jedynie metodą drzewkową, choć można je rozwiązać wykorzystując model klasyczny.



Doświadczenie losowe opisane w zadaniu to losowanie po jednej kuli z dwóch pojemników. Możemy je potraktować, jako doświadczenie dwuetapowe, w którym pierwszy etap to losowanie jednej kuli z pierwszego pojemnika, a drugi etap – losowanie jednej kuli z drugiego pojemnika. Na gałęziach zapiszmy odpowiednie prawdopodobieństwa, a istotne gałęzie pogrubimy. Pamiętając, że wzdłuż gałęzi mnożymy prawdopodobieństwa, a wyniki z poszczególnych gałęzi dodajemy, obliczamy prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul tego samego koloru

$$\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{6}+\frac{3}{9}\cdot\frac{3}{6}+\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{6}=\frac{19}{54}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul tego samego koloru jest równe $\frac{19}{54}$.

XX. PRZYKŁADY ZADAŃ Z POZIOMU ROZSZERZONEGO

Ostatni rozdział tego opracowania poświęcimy wybranym zadaniom z poziomu rozszerzonego. Podane przykłady zadań oczywiście nie wyczerpują całego zakresu wymagań egzaminacyjnych z poziomu rozszerzonego, a jedynie sygnalizują te umiejętności i działy podstawy programowej, z zakresu których pojawiały się zadania na egzaminie maturalnym z matematyki z poziomu rozszerzonego w maju 2010.

Zadanie 1. (Egzamin maturalny – maj 2010, s. 2, zadanie 1)

Rozwiąż nierówność $|2x+4|+|x-1|\le 6$.

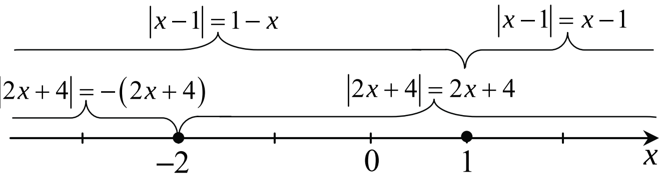
Rozwiązanie

Wykorzystamy najpierw dwukrotnie definicję wartości bezwzględnej.

Ponieważ $|2x+4| = 2x+4$, gdy $2x+4\ge 0$ czyli gdy $x\ge -2$, natomiast $|2x+4| = -(2x+4)$, gdy $2x+4<0$ czyli gdy $x<-2$, zatem dla wszystkich liczb $x\ge -2$ możemy zapisać $2x+4$ zamiast $|2x+4|$, a dla wszystkich $x<-2$ możemy zapisać $-(2x+4)$ zamiast $|2x+4|$.

Podobnie $|x-1| = x-1$, gdy $x-1\ge 0$ czyli gdy $x\ge 1$, natomiast $|x-1| = -(x-1) = 1-x$, gdy $x-1<0$ czyli gdy $x<1$. Oznacza to, że dla wszystkich $x\ge 1$ możemy zapisać $x-1$ zamiast $|x-1|$, a dla wszystkich $x<1$ możemy zapisać $1-x$ zamiast $|x-1|$.

Dla jasności zaznaczmy to na osi liczbowej.



Widzimy stąd, że liczby -2 i 1 podzieliły oś liczbową na trzy przedziały: $(-\infty,-2)$, $\langle -2,1)$ i $\langle 1,+\infty)$. W każdym z tych przedziałów możemy zapisać naszą nierówność bez użycia znaku wartości bezwzględnej. Warto przy tym zauważyć, że nie ma znaczenia, które przedziały będą domknięte, a które otwarte, byleby tylko w sumie przedziały te pokrywały całą oś liczbową. W każdym z tych przedziałów możemy naszą nierówność zapisać bez użycia znaku wartości bezwzględnej. Mamy więc do rozpatrzenia trzy przypadki:

I. Dla $x\in(-\infty,-2)$ nierówność możemy zapisać w postaci $-(2x+4)+1-x\le 6$.

Rozwiązując ją mamy kolejno

$$-2x-4+1-x\le 6,$$

$$-3x\le 9,$$

$$x\ge -3.$$

Ale ponieważ braliśmy pod uwagę tylko liczby $x < -2$, więc w tym przypadku mamy

$$x \in \langle -3, -2).$$

II. Dla $x \in \langle -2, 1)$ nierówność możemy zapisać w postaci $2x + 4 + 1 - x \le 6$. Stąd $x \le 1$.

Tym razem braliśmy pod uwagę tylko liczby $x \in \langle -2, 1)$, a każda z tych liczb jest niewiększa niż 1, więc w tym przypadku mamy $x \in \langle -2, 1)$.

III. Dla $x \in \langle 1, +\infty)$ nierówność możemy zapisać w postaci $2x + 4 + x - 1 \le 6$. Stąd $x \le 1$.

Teraz braliśmy pod uwagę tylko liczby $x \in \langle 1, +\infty)$, więc w tym przypadku jedynie liczba $x = 1$ spełnia nierówność.

W rezultacie rozpatrzonych przypadków liczba *x* spełnia naszą nierówność, gdy

$$x \in \langle -3, -2) \text{ lub } x \in \langle -2, 1) \text{ lub } x = 1$$

czyli gdy $x \in \langle -3, 1 \rangle$.

Odpowiedź: $x \in \langle -3, 1 \rangle$.

Zadanie 2. (Egzamin maturalny – maj 2010, s. 12, zadanie 6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru *m*, dla których równanie $x^2 + mx + 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste takie, że suma ich kwadratów jest większa od $2m^2 - 13$.

Rozwiązanie

Równanie $x^2 + mx + 2 = 0$ z niewiadomą *x* jest kwadratowe przy dowolnej wartości parametru *m*. Posiada ono dwa różne pierwiastki x_1, x_2 tylko wtedy, gdy jego wyróżnik jest dodatni, czyli gdy $\Delta > 0$. Wykorzystując wzór na wyróżnik otrzymujemy

$$m^2 - 4 \cdot 2 > 0,$$

$$\left(m - 2\sqrt{2}\right)\left(m + 2\sqrt{2}\right) > 0.$$

Stąd

$$m \in \left(-\infty, -2\sqrt{2}\right) \cup \left(2\sqrt{2}, +\infty\right).$$

Rozwiążmy teraz nierówność ${x_1}^2 + {x_2}^2 > 2m^2 - 13$. Możemy wykorzystać wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego. Wtedy $x_1 = \frac{-m - \sqrt{m^2 - 8}}{2}$, $x_2 = \frac{-m + \sqrt{m^2 - 8}}{2}$,

a nierówność przyjmie postać $\left(\frac{-m - \sqrt{m^2 - 8}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-m + \sqrt{m^2 - 8}}{2}\right)^2 > 2m^2 - 13$.

Stąd mamy kolejno

$$\frac{m^2 + 2m\sqrt{m^2 - 8} + m^2 - 8}{4} + \frac{m^2 - 2m\sqrt{m^2 - 8} + m^2 - 8}{4} > 2m^2 - 13,$$

$$\frac{m^2+\cancel{2m\sqrt{m^2-8}}+m^2-8+m^2\cancel{-2m\sqrt{m^2-8}}+m^2-8}{4}>2m^2-13,$$

$$\frac{4m^2-16}{4}>2m^2-13,$$

$$m^2-4>2m^2-13,$$

$$0>m^2-9,$$

$$(m-3)(m+3)<0,$$

$$m\in(3,3).$$

Stąd i z poprzedniej części rozwiązania otrzymujemy ostatecznie

$m\in\left(-3,-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2},3\right)$.

Nierówność $x_1^2+x_2^2>2m^2-13$ możemy rozwiązać znacznie szybciej wykorzystując wzory na sumę i na iloczyn pierwiastków trójmianu kwadratowego. Są to tzw. wzory Viète'a. Są one podane również w *Zestawie wzorów* na stronie 4. Najpierw jednak musimy tak zapisać naszą nierówność, żeby te wzory móc wykorzystać. Dodając i odejmując do lewej strony nierówności podwojony iloczyn pierwiastków mamy

$$x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2>2m^2-13.$$

To z kolei możemy zapisać w postaci

$$\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2>2m^2-13.$$

Teraz wykorzystujemy wzory Viète'a i zapisujemy nierówność w postaci

$$\left(\frac{-m}{1}\right)^2-2\cdot\frac{2}{1}>2m^2-13,$$

$$m^2-4>2m^2-13.$$

Dalej postępujemy już tak samo jak poprzednio.

Odpowiedź: $m\in\left(-3,-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2},3\right)$.

Zadanie 3. (Egzamin maturalny – maj 2010, s. 4, zadanie 2)

Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $2\cos^2 x-5\sin x-4=0$ należące do przedziału $\langle 0,2\pi\rangle$.

Rozwiązanie

Rozwiązując równanie trygonometryczne dążymy zazwyczaj do tego, aby niewiadoma była związana jedną funkcją trygonometryczną. Teraz niewiadoma w pierwszym miejscu, w którym występuje jest związana funkcją cosinus, w drugim miejscu jest związana funkcją sinus. Między funkcjami sinus i cosinus tego samego argumentu *x* zachodzi związek $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ zwany jedynką trygonometryczną. Stąd wyznaczamy $\cos^2 x=1-\sin^2 x$. Zatem nasze równanie możemy zapisać w postaci

$$2\left(1-\sin^2 x\right)-5\sin x-4=0.$$

Po uporządkowaniu i pomnożeniu obu jego stron równania przez -1 dostajemy

$$2\sin^2 x+5\sin x+2=0.$$

Jest to równanie kwadratowe z niewiadomą $\sin x$. Zwykle tę niewiadomą oznaczamy jedną literą np. t i wtedy mówimy, że wykonujemy podstawienie $t=\sin x$. Równanie zapisujemy wówczas w postaci

$$2t^2+5t+2=0.$$

Warto teraz jeszcze podać warunek na wartość, jaką może przyjąć niewiadoma t, tzn. zapisać $t\in\langle -1,1\rangle$, gdyż tylko takie wartości może przyjąć sinus.

Rozwiązujemy to równanie kwadratowe

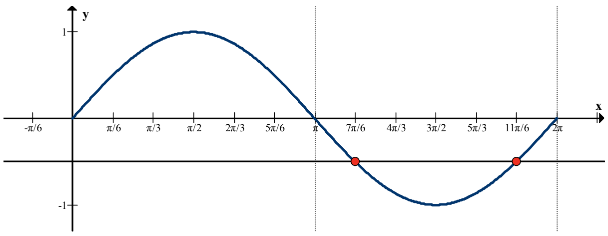
$$\Delta=5^2-4\cdot 2\cdot 2=9,\quad \sqrt{\Delta}=3$$

$$t=\frac{-5-3}{2\cdot 2}=-2 \text{ lub } t=\frac{-5+3}{2\cdot 2}=-\frac{1}{2}$$

Pierwsze z otrzymanych rozwiązań nie należy do przedziału $\langle -1,1\rangle$, drugie należy.

Pozostaje do rozwiązania równanie $t=-\frac{1}{2}$ czyli $\sin x=-\frac{1}{2}$ w przedziale $\langle 0,2\pi\rangle$.

Najwygodniej jest posłużyć się wykresem funkcji sinus w tym przedziale



z którego odczytujemy wszystkie rozwiązania

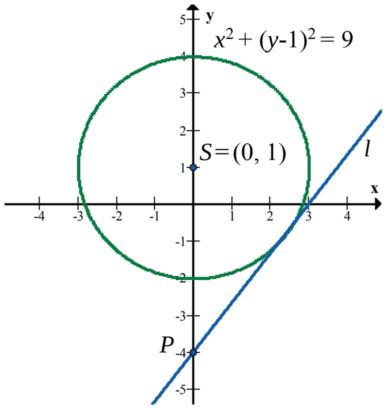
$$x=\frac{7}{6}\pi \text{ lub } x=\frac{11}{6}\pi.$$

Odpowiedź: W przedziale $\langle 0,2\pi\rangle$ dane równanie ma dwa rozwiązania: $x=\frac{7}{6}\pi$, $x=\frac{11}{6}\pi$.

Zadanie 4.

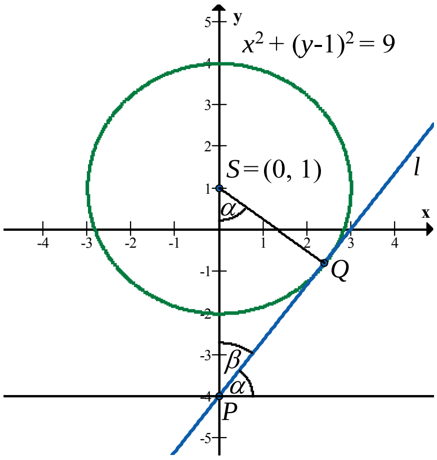
Dany jest okrąg o równaniu $x^2+(y-1)^2=9$. Prosta l jest styczna do tego okręgu, przechodzi przez punkt $P=(0,-4)$ i jej współczynnik kierunkowy jest dodatni (zobacz rysunek).

Wyznacz równanie prostej l.



Rozwiązanie

Oznaczmy przez Q punkt styczności prostej l i okręgu. Ponieważ **styczna do okręgu jest prostopadła do promienia tego okręgu poprowadzonego do punktu styczności**, więc trójkąt PSQ jest prostokątny. Oznaczmy też przez α i β miary kątów ostrych w tym trójkącie. Poprowadźmy również przez punkt P prostą równoległą do osi Ox, tak jak na rysunku poniżej.



Promień okręgu jest równy 3, gdyż $r^2 = 9$, a odległość $|SP| = 5$. Wykorzystując twierdzenie Pitagorasa możemy obliczyć odległość $|PQ|$:

$$|PQ|^2 + |SQ|^2 = |SP|^2,$$

$$|PQ|^2 + 3^2 = 5^2,$$

$$|PQ|^2 = 5^2 - 3^2 = 16,$$

$$|PQ| = 4.$$

Zauważmy, że kąt, jaki tworzy prosta l z osią Ox, jest taki sam, jak kąt, jaki ta prosta tworzy z prostą $y = -4$. Jest on równy $90° - \beta$, ale kąt β ma miarę $90° - \alpha$. Zatem kąt między prostą l oraz narysowaną prostą poziomą ma miarę α. Jest to jednocześnie kąt nachylenia prostej l do osi Ox. Tangens tego kąta jest równy współczynnikowi kierunkowemu prostej l. Ale tangens tego kąta możemy łatwo obliczyć z trójkąta PQS

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{|PQ|}{|SQ|} = \frac{4}{3}.$$

Ponieważ prosta l przechodzi przez punkt $P = (0, -4)$, więc wyraz wolny w równaniu prostej l jest równy -4. Równanie prostej l ma zatem postać

$$y = \frac{4}{3}x - 4.$$

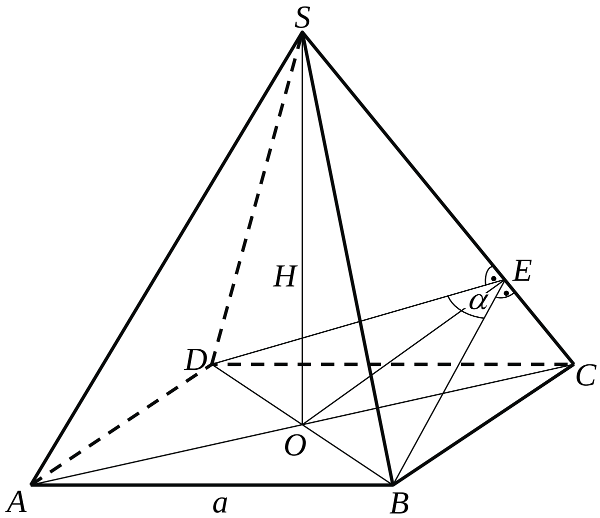
Odpowiedź: Równanie prostej l ma postać $y = \frac{4}{3}x - 4$.

Zadanie 5. (Informator maturalny, s. 48, zadanie 32)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość a, zaś miara kąta między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi jest równa α . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Rozwiązanie

Sporządźmy najpierw rysunek tego ostrosłupa i zaznaczmy na nim kąt między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi.



Ponieważ mamy daną długość krawędzi podstawy, więc aby obliczyć objętość ostrosłupa musimy obliczyć jego wysokość. Do tego sprowadza się nasze zadanie.

Trójkąt *BDE* jest równoramienny, a odcinek *OE* jest jego wysokością opuszczoną na podstawę *BD*. Odcinek *BD* to przekątna kwadratu o boku długości a, więc

$$|BD| = a\sqrt{2} \text{, a stąd } |OB| = \frac{1}{2}|BD| = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Z trójkąta prostokątnego *BOE* możemy zapisać

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{|OB|}{|OE|} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{|OE|}.$$

Stąd obliczamy długość odcinka *OE*

$$|OE| = \frac{|OB|}{|OE|} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Weźmy teraz pod uwagę trójkąt *COS*. Jest on prostokątny. Odcinek *OE* jest w nim wysokością opuszczoną na przeciwprostokątną *CS*. Zauważmy, że trójkąty *COS* i *CEO* są podobne, gdyż oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku *C*. Stąd otrzymujemy proporcję

$$\frac{|SO|}{|OC|} = \frac{|OE|}{|EC|} \text{, czyli } \frac{H}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2tg\frac{\alpha}{2}}}{|EC|},$$

z której obliczymy wysokość ostrosłupa. Wcześniej jednak musimy obliczyć długość odcinka *EC*. Tę z kolei obliczymy z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie *CEO*.

$$|OC|^2=|OE|^2+|EC|^2 \text{ czyli } \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\right)^2+|EC|^2.$$

Stąd

$$|EC|=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{2a^2}{4}\left(1-\frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\right)}=\frac{a\sqrt{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}.$$

Teraz obliczamy wysokość ostrosłupa

$$H=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2tg\frac{\alpha}{2}}}{|EC|}=\frac{\frac{a^{\cancel{2}}}{\cancel{2}\operatorname{tg}\cancel{\frac{\alpha}{2}}}}{\frac{\cancel{a}\sqrt{2}}{\cancel{2}\operatorname{tg}\cancel{\frac{\alpha}{2}}}\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}=\frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}.$$

Możemy wreszcie obliczyć objętość ostrosłupa

$$V=\frac{1}{3}a^2\cdot H=\frac{1}{3}a^2\cdot\frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}=\frac{a^3}{3\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}.$$

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa jest równa $\frac{a^3}{3\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}$.

Zadanie 6. (Informator maturalny, s. 92, zadanie 106)

Udowodnij, że jeśli

a) x, y są liczbami rzeczywistymi, to $x^2+y^2\ge 2xy$,

b) x, y, z są liczbami rzeczywistymi takimi, że $x+y+z=1$ to $x^2+y^2+z^2\ge\frac{1}{3}$.

Rozwiązanie

Udowodnienie części a) jest bardzo proste. Wystarczy zauważyć, że nierówność $x^2+y^2\ge 2xy$ jest równoważna nierówności $x^2-2xy+y^2\ge 0$, a ta nierówności $(x-y)^2\ge 0$, która jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y (kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest nieujemny).

W dowodzie części b) wykorzystamy udowodnioną przed chwilą nierówność.

$$1=1^2=(x+y+z)^2=x^2+2x(y+z)+(y+z)^2=x^2+2xy+2xz+y^2+2yz+z^2=$$

$$=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$$

Z udowodnionej wcześniej nierówności mamy

$$2xy\le x^2+y^2 \text{ i } 2xz\le x^2+z^2 \text{ i } 2yz\le y^2+z^2,$$

więc

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz\le x^2+y^2+z^2+\left(x^2+y^2\right)+\left(x^2+z^2\right)+\left(y^2+z^2\right)=$$

$$=3x^2+3y^2+3z^2=3\left(x^2+y^2+z^2\right).$$

Wykazaliśmy zatem, że $3\left(x^2+y^2+z^2\right)\ge 1$, czyli $x^2+y^2+z^2\ge\frac{1}{3}$.

Co kończy dowód.

Warto zauważyć, że znacznie szybciej udowodnimy tę nierówność wykorzystując nierówność między średnią arytmetyczną liczb *x*, *y*, *z*, a ich średnią kwadratową. Z tego twierdzenia wynika, że dla dowolnych liczb rzeczywistych prawdziwa jest nierówność

$$\frac{x+y+z}{3} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}\,.$$

Ponieważ z założenia wiemy, że $x+y+z=1$, więc dostajemy

$$\frac{1}{3} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}\,.$$

Obie strony tej nierówności są nieujemne, więc podnosząc je do kwadratu uzyskujemy nierówność równoważną

$$\frac{1}{9} \le \frac{x^2+y^2+z^2}{3} \quad \text{czyli} \quad x^2+y^2+z^2 \ge \frac{1}{3}\,.$$

XXI. ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ĆWICZENIOWYCH

ROZDZIAŁ II

Zadanie 5: **C**.

Zadanie 6: **B**.

ROZDZIAŁ III

Zadanie 3: **C**.

Zadanie 6: **D**.

Zadanie 12: **A**.

ROZDZIAŁ IV

Zadanie 2: **B**.

Zadanie 6: **A**.

Zadanie 8: **A**.

Zadanie 9: **B**.

Zadanie 12: **A**.

ROZDZIAŁ VI

Zadanie 4: $-2, 2, 7$.

Zadanie 5: $-\sqrt{5}, -2, \sqrt{5}$.

ROZDZIAŁ VIII

Zadanie 3: **B**.

Zadanie 5: **B**.

Zadanie 6: $x=1$.

Zadanie 8: **C**.

Zadanie 12: **A**.

Zadanie 13: **C**.

ROZDZIAŁ X

Zadanie 2: $\sqrt{65}$.

Zadanie 5: **C**.

ROZDZIAŁ XII

Zadanie 5: $c_1 = 6, c_2 = 10$.

Zadanie 8: **C**.

Zadanie 11: **B**.

ROZDZIAŁ XVI

Zadanie 4: 60π .

Zadanie 9. Rozwiązanie

Oznaczmy przez *R* promień kuli, przez *r* promień podstawy stożka, a przez *h* wysokość stożka. Wówczas objętość kuli jest równa $V_k = \frac{4}{3}\pi R^3$, a jej pole powierzchni $P_k = 4\pi R^2$. Objętość stożka jest równa $V_s = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$, a pole podstawy $P_{Ps} = \pi r^2$. Ponieważ $h = \frac{1}{2}r$, więc $V_s = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{1}{2}r = \frac{1}{6}\pi r^3$. Z równości objętości $\frac{1}{6}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$ otrzymujemy $r^3 = 8R^3$, czyli $r = 2R$. Stąd $P_{Ps} = \pi r^2 = \pi(2R)^2 = 4\pi R^2 = P_k$.

ROZDZIAŁ XVIII

Zadanie 5: 9.

Zadanie 8: 10**.**

Zadanie 9: **A.**

ROZDZIAŁ XIX

Zadanie 3: $\frac{1}{18}$.

Zadanie 6: $\frac{2}{5}$.

Politechnika Świętokrzyska

al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7
25-314 Kielce
www.tu.kielce.pl